1. Klausur Logik, Semantik und Verifikation (SS 2003)

Prof. Dr. Gert Smolka   Marco Kuhlmann, MSc

7. Juni 2003

INTERN	–
Name	Sitzplatz
–	–
Matrikelnummer	Code

Bitte öffnen Sie das Klausurheft erst dann, wenn Sie dazu aufgefordert werden.

Sie können die Klausur nur auf dem für Sie vorgesehen Platz mitschreiben. Sie müssen das mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehene Klausurheft verwenden.

Hilfsmittel sind nicht zugelassen. Am Arbeitsplatz dürfen nur Schreibgeräte, Getränke, Speisen und Ausweise mitgeführt werden. Taschen und Jacken müssen an den Wänden des Klausursaals zurückgelassen werden.

Verlassen des Saals ohne vorherige Abgabe des Klausurhefts gilt als Täuschungsversuch.

Wenn Sie während der Bearbeitung zur Toilette müssen, geben Sie bitte Ihr Klausurheft bei der Aufsicht ab. Es kann immer nur eine Person zur Toilette.

Alle Lösungen müssen auf den bedruckten rechten Seiten des Klausurhefts notiert werden. Die leeren linken Seiten dienen als Platz für Skizzen und werden **nicht korrigiert.** Notizpapier ist nicht zugelassen. Sie können mit Bleistift schreiben.

Für die Bearbeitung der Klausur stehen 150 Minuten zur Verfügung. Insgesamt können 150 Punkte erreicht werden. Die für jede Aufgabe angebene Punktzahl gibt Ihnen also einen Anhaltspunkt, wieviel Zeit Sie auf die Bearbeitung der Aufgabe verwenden sollten. Zum Bestehen der Klausur genügen 75 Punkte.

Bitte legen Sie zur Identifikation Ihren Personalausweis bzw. Reisepass sowie Ihren Studierendenausweis neben sich.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	16	6	12	12	16	20	20	10	20

Summe
150

Note

Aufgabe 1: Gültigkeit Boolescher Gleichungen $(18 = 4 + 6 + 8)$

Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen in allen Booleschen Algebren gültig sind. Dabei dürfen Sie die Axiome, die Definitionen von Implikation und Konditional sowie die Resolutionsregel verwenden. Es genügt, wenn Sie die Verwendung der Resolutionsregel und des Absorptionsaxioms vermerken.

(a) $(xy) \Rightarrow z \;=\; x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$

(b) $(x, y, z) \;=\; (\overline{x} \Rightarrow y)(x \Rightarrow z)$

(c) $(x, y, z) + u \;=\; (x, y + u, z + u)$

Aufgabe 2: Lösen Boolescher Gleichungen $(16 = 4 + 12)$

(a) Sei ein Boolesches Gleichungssystem $\{a_1 = b_1,\ a_2 = b_2\}$ gegeben. Geben Sie einen Booleschen Ausdruck a an, sodass das System dieselben Lösungen wie die Gleichung $a = 0$ hat.

(b) Sei das Boolesche Gleichungssystem $\{x = x+y,\ y = \overline{x}\cdot y\}$ gegeben. Geben Sie einen möglichst einfachen Booleschen Ausdruck a an, sodass das System dieselben Lösungen wie die Gleichung $a = 0$ hat.

Aufgabe 3: Modellierung (6)

Sie haben über zwei Clowns X und Y die folgenden sicheren Informationen:

(i) Für jeden der beiden gilt: Er sagt entweder immer die Wahrheit oder immer die Unwahrheit.

(ii) Clown X hat gesagt: Y sagt die Wahrheit.

(iii) Clown Y hat gesagt: Ich sage die Wahrheit und X sagt die Unwahrheit.

Modellieren Sie die Aussagen (ii) und (iii) durch Boolesche Gleichungen. Verwenden Sie dabei die Variablen X und Y. Es soll $X = 1$ genau dann gelten, wenn Clown X die Wahrheit sagt und $Y = 1$ genau dann, wenn Clown Y die Wahrheit sagt.

Aufgabe 4: Modellierung ($12 = 4 + 8$**)**

Sei σ eine Belegung, X eine Variable und f eine Funktion $\mathit{For} \to \mathbb{B}$, sodass für jede Formel A gilt:

(i) $f\,A = \text{if } \sigma X = 0 \text{ then } \mathcal{T}(A)\sigma \text{ else } 1 - \mathcal{T}(A)\sigma$

(ii) $f\,A = \mathcal{T}(A)\sigma$ genau dann, wenn $\sigma X = 0$.

Sei B eine Formel.

(a) Geben Sie eine Formel A an mit $\mathcal{T}(B)\sigma = f\,A$.

(b) Können Sie Ihre Wahl der Formel A begründen?

Aufgabe 5: Übersetzung in kanonische Formelmenge (12)

Seien X und Y zwei verschiedene Variablen. Geben Sie eine möglichst kleine kanonische Formelmenge an, in die sich jede Formel A mit $SV(A) \subseteq \{X, Y\}$ übersetzen lässt. Verwenden Sie dafür nur die Variablen X und Y, die Konstanten 0 und 1, sowie die Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$.

Aufgabe 6: Primdarstellungen $(16 = 4 + 4 * 2 + 4)$

Seien X, Y, Z, U Variablen und sei A die Formel

$$X \Rightarrow \overline{\left(U \Rightarrow \left(Z + \overline{X}\,\overline{Y}\right)\right)}$$

(a) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.

(b) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.

(c) Geben Sie die konjunktive Primform für $\widehat{A}$ an.

(d) Geben Sie die konjunktive Primform für $\overline{A}$ an.

(e) Geben Sie die signifikanten Variablen von A an.

(f) Geben Sie die Primbäume für A, $\overline{A}$ und $\widehat{A}$ an $(X < Y < Z < U)$.

Aufgabe 7: Primbaumalgorithmus (20)

Geben Sie eine Prozedur

$$imp \in PT \times PT \to PT$$

an, die zu zwei Primbäumen A, B den Primbaum für die Formel $A \Rightarrow B$ liefert.

Verwenden Sie dabei die Hilfsprozedur

$$red \in Var \times PT \times PT \to PT$$
$$red(X, A, B) = \textsf{if } A = B \textsf{ then } A \textsf{ else } (X, A, B)$$

Verwenden Sie ansonsten keine Hilfsprozedur.

Aufgabe 8: Minimale Graphdarstellung $(20 = 8 + 6 + 6)$

Wir betrachten die Formeln $A = (X\,Z) \Rightarrow \overline{Y}$ und $B = (\overline{X} + Y) \Rightarrow \overline{Z}$.

(a) Zeichnen Sie die Primbäume $\pi\, A$ und $\pi\, B$. Legen Sie dabei die Variablenordnung $X < Y < Z$ zugrunde.

(b) Zeichnen Sie einen *minimalen* Entscheidungsgraphen, der Knoten hat, die $\pi\, A$ und $\pi\, B$ darstellen. Geben Sie an, welcher Knoten $\pi\, A$ und welcher Knoten $\pi\, B$ darstellt.

(c) Geben Sie eine Tabellendarstellung Ihres Entscheidungsgraphen an. Vermerken Sie die dabei verwendeten Knotennummern in der graphischen Darstellung Ihres Graphen.

Aufgabe 9: Induktionssatz (10)

Geben Sie den Induktionssatz an:

> Seien X und A Mengen und $\succ$ eine terminierende Relation. Dann ...

Aufgabe 10: Induktionsbeweis (20)

Sei $For' \subseteq For$ die Menge aller Formeln, die mit Variablen und 0, 1, $\neg$ und $\wedge$ gebildet werden können. Sei X eine Variable. Beweisen Sie:

$$\forall A \in For' : \;\; X \wedge A \;\; \models\!\!\!| \;\; X \wedge A[X := 1]$$

Verwenden Sie dabei, dass die Gleichung

$$x \wedge \neg y = x \wedge \neg(x \wedge y)$$

in jeder Booleschen Algebra gültig ist.

Definitionen und Gleichungen

Definitionen

$x \Rightarrow y = \overline{x} + y$	Implikation
$x \Leftrightarrow y = xy + \overline{x}\,\overline{y}$	Äquivalenz
$(x, y, z) = \overline{x}y + xz$	Konditional

Gleichungen

$xy + \overline{z} = xy + \overline{x}z + yz$	Resolution
$x(x + y) = x$	Absorption