2. Übungsblatt zu Einführung in die Computationale Logik, SS 2003

Prof. Dr. Gert Smolka, Marco Kuhlmann, MSc
http://www.ps.uni-sb.de/courses/cl-ss03/

Lesen Sie im Skript: Kapitel 3 und von Kapitel 4 die Abschnitte 4.3–4.5

Aufgabe 2.1: Lösen von Gleichungen Lösen Sie das Gleichungssystem

(i) $x = \overline{y}$

(ii) $x = (x \Leftrightarrow y)$

in der zweiwertigen Booleschen Algebra.

Aufgabe 2.2: Lösen von Gleichungen Lösen Sie das Gleichungssystem

(i) $x = (x \Leftrightarrow y)$

(ii) $y = y - x$

in der zweiwertigen Booleschen Algebra. Hinweis: Normieren Sie das Gleichungssystem zu $a = 1$ und vereinfachen Sie dann a.

Aufgabe 2.3: Beschreibung von Booleschen Funktionen durch Boolesche Ausdrücke Beschreiben Sie die folgenden Booleschen Funktionen über $\mathit{Var} = \{X, Y, Z\}$ ($|\mathit{Var}| = 3$) durch Ausdrücke, die nur mit X, Y, Z, 0, 1, $+$, $\cdot$ und $\overline{}$ gebildet sind.

(a) $\lambda\,\sigma \in \Sigma\,.\,$ if $\sigma X = \sigma Y$ then σZ else σY

(b) $\lambda\,\sigma \in \Sigma\,.\,$ if $\sigma X + \sigma Y + \sigma Z \geq 2$ then $1 - \sigma X$ else $\sigma Y \cdot \sigma Z$

(c) $\lambda\,\sigma \in \Sigma\,.\,1 - \min\{\sigma X, \sigma Y, \sigma Z\}$

Aufgabe 2.4: Syntax und Semantik Wir betrachten Ausdrücke, die gemäß der folgenden Grammatik gebildet sind:

$$X, Y \in \mathit{Var} \qquad\qquad A, B \in \mathit{Aus} \ ::= \ X \mid 0 \mid A \Rightarrow B$$

(a) Definieren Sie eine Funktion $\mathit{VV} \in \mathit{Aus} \to \mathcal{P}_{\mathit{fin}}(\mathit{Var})$, die zu einem Ausdruck alle in ihm vorkommenden Variablen liefert.

(b) Definieren Sie eine Funktion $\mathit{subst} \in \mathit{Aus} \times \mathit{Var} \times \mathit{Aus} \to \mathit{Aus}$, die zu einem Ausdruck A, einer Variablen X und einem Ausdruck B den Ausdruck liefert, den man aus A erhält, wenn man alle Auftreten von X durch B ersetzt.

(c) Stellen Sie die folgenden Ausdrücke mit Tupeln und Variantennummern dar. Nehmen Sie dabei an, dass $X = 1$ und $Y = 2$ gilt.

(i) $X \Rightarrow 0$ (ii) Y

(d) Definieren Sie eine Funktion $\mathfrak{I} \in \mathit{Aus} \to (\mathit{Var} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$, die zu einem Ausdruck die durch ihn beschriebene Boolesche Funktion liefert.

(e) Definieren Sie eine Funktion $\mathfrak{I}' \in \mathit{Aus} \to \mathcal{P}(\mathit{Var} \to \mathbb{B})$, die zu einem Ausdruck die durch ihn beschriebene Boolesche Menge liefert.

(f) Definieren Sie zwei Funktionen $\mathit{neg} \in \mathit{Aus} \to \mathit{Aus}$ und $\mathit{or} \in \mathit{Aus} \times \mathit{Aus} \to \mathit{Aus}$, sodass für alle $A, B \in \mathit{Aus}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}'(\mathit{neg}(A)) &= (\mathit{Var} \to \mathbb{B}) - \mathfrak{I}'(A) \\ \mathfrak{I}'(\mathit{or}(A, B)) &= \mathfrak{I}'(A) \cup \mathfrak{I}'(B). \end{aligned}$$

(g) Geben Sie einen Ausdruck an, der die Variablen X und Y enthält, aber keine signifikanten Variablen hat.

(h) Stellen Sie die Mengen *Var* und *Aus* in SML dar und deklarieren Sie Prozeduren, die die Funktionen *VV*, *subst*, $\mathfrak{I}$, *neg* und *or* berechnen.

Aufgabe 2.5: Erfüllbarkeit Eine Formelmenge $M \subseteq \mathit{For}$ heißt *erfüllbar* genau dann, wenn eine Belegung σ existiert, sodass für alle $A \in M$ gilt: $\mathcal{T}(A)\sigma = 1$.

Geben Sie eine Formelmenge M wie folgt an:

(a) M enthält genau drei Formeln.

(b) M ist unerfüllbar.

(c) Jede zweielementige Teilmenge von M ist erfüllbar.

Aufgabe 2.6: Signifikante Variablen Geben Sie für die folgenden Booleschen Ausdrücke einen jeweils äquivalenten Ausdruck an, der nur signifikante Variablen enthält:

(a) $x(x + yz)$

(b) $x \Rightarrow y \Rightarrow z \Rightarrow x$

(c) $x \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y)$

(d) $(x \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y)) \Leftrightarrow y$

Aufgabe 2.7: NAND In dieser Aufgabe betrachten wir zwei modifizierte Mengen Boolescher Formeln. Die Menge *For*$'$ entstehe aus der bekannten Menge *For* durch Hinzunahme der Operation $\overline{\wedge}$ (nand). Die Menge *For*$''$ enthalte *nur* die Operation $\overline{\wedge}$ und Variablen:

$$A, B \in \mathit{For}' \quad = \quad \cdots \mid A_1 \mathbin{\overline{\wedge}} A_2 \qquad\qquad \mathit{For}'' = \{\, A \in \mathit{For}' \mid A \text{ enthält nur Variablen und } \overline{\wedge} \,\}$$

Die Denotation der bekannten Operatoren sei wie üblich definiert, die von $\overline{\wedge}$ wie folgt:

$$\mathcal{B}(A_1 \mathbin{\overline{\wedge}} A_2)\sigma = \neg^{\mathcal{B}}(\mathcal{B}(A_1)\sigma \wedge^{\mathcal{B}} \mathcal{B}(A_2)\sigma)$$

Geben Sie mit Hilfe von struktureller Rekursion eine Funktion $T \in \mathit{For}' \to \mathit{For}''$ an, sodass gilt:

$$\forall A \in \mathit{For}' \colon T\,A \mathrel{\models\!\!\!\dashv} A$$

Aufgabe 2.8: Bipartite Graphen Ein Graph heißt *bipartit* genau dann, wenn jeder Knoten entweder rot oder blau gefärbt werden kann, sodass jede Kante nur verschiedenfarbige Knoten verbindet.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V \subseteq \mathit{Var}$. Beschreiben Sie, wie man zu G eine Formel in *For* konstruieren kann, die genau dann erfüllbar ist, wenn G bipartit ist.

Aufgabe 2.9: Knusiländische Zoologie Ihr Logikerfreund aus Knusiland schreibt: „Bei meiner jüngsten Expedition in die Weiten Knusilands fiel mir ein seltenes Tier auf, der Gnumpf. Leider konnten mir meine Mitreisenden nur wenig über Gnumpfe erzählen. Ich befragte daher nach meiner Rückkehr einen befreundeten bebianischen Zoologen, der, wie alle Mitglieder seines Volksstammes, allerdings konsequent die Unwahrheit sagte:

(i) ‚Gnumpfe bruseln nicht und fnoseln nicht.‘

(ii) ‚Gnumpfe fnoseln und bruseln und erpfen auch.‘

(iii) ‚Gnumpfe fnoseln, und wenn sie bruseln, dann erpfen sie.‘“

Können Sie den Bericht Ihres Freundes auf das Wesentliche reduzieren?

(a) Formalisieren Sie jede der Aussagen des Zoologen durch jeweils eine Boolesche Formel, in denen nur die Variablen B, F, E vorkommen, die wahr sein sollen genau dann, wenn Gnumpfe bruseln, fnoseln bzw. erpfen.

(b) Welche Eigenschaften haben nun Gnumpfe?

Aufgabe 2.10: Gefangen in Knusiland ($\star$) Ihr Logikerfreund ist in die Gefangenschaft knusiländischer Räuber geraten! „Immerhin," so berichtet er nach seinem glücklichen Entkommen, „ließen mir die Burschen eine faire Chance: Ihre beiden Anführer, Xurx und Yrx, versprachen mir meine Freilassung für den Fall, dass ich erraten könnte, welchem Volksstamm sie jeweils angehörten – dem der Abianer, die ja bekanntlich immer die Wahrheit sagen, oder dem der Bebianer, die stets lügen. Zu meinem Glück hatte ich die folgenden sicheren Informationen über die beiden:

(i) Xurx hatte einmal am Lagerfeuer gesagt: ‚Entweder ich sage immer die Wahrheit, oder aber Yrx sagt immer die Unwahrheit, aber niemals gilt beides.'

(ii) Yrx hörte ich einmal einem anderen Räuber anvertrauen: ‚Ich sage immer die Wahrheit, und Xurx sagt immer die Unwahrheit.'"

Nun zu Ihren Aufgaben:

(a) Beschreiben Sie die in den Aussage (i) und (ii) Ihres Logikerfreundes enthaltenen Informationen durch jeweils eine Boolesche Gleichung, in der nur die Varialen x und y vorkommen. Die Gleichung soll in der zweiwertigen Booleschen Algebra $\mathcal{T}$ interpretiert werden, und die Variablen x und y sollen genau dann 1 sein, wenn der jeweilige Räuberhauptmann Abianer ist.

(b) Geben Sie einen möglichst einfachen Booleschen Ausdruck a an, sodass $a = 1$ genau dann gültig ist, wenn Ihre obigen Gleichungen gültig sind (Normierung und Vereinfachung).

(c) Geben Sie die Volkszugehörigkeiten der beiden Räuberhauptmänner an.