5. Übungsblatt zu Einführung in die Computationale Logik, SS 2003

Prof. Dr. Gert Smolka, Marco Kuhlmann, MSc
`http://www.ps.uni-sb.de/courses/cl-ss03/`

Lesen Sie im Skript: Kapitel 4 bis auf Abschnitte 4.2 und 4.17

Aufgabe 5.1 Sei $X < Y < Z$ und sei A die Formel

$$(Z \Rightarrow (X \vee Y)) \wedge (X \vee Y \vee Z) \wedge (Y \Rightarrow X) \wedge (X \Rightarrow 0)$$

(a) Geben Sie die Formel $\widehat{A}$ an.

(b) Geben Sie eine konjunktive Normalform für A an.

(c) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.

(d) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.

(e) Geben Sie den Primbaum für A an.

(f) Geben Sie den Primbaum für $\widehat{A}$ an.

Aufgabe 5.2 Sei PT die Menge aller Primbäume und PF die Menge aller Primformen.

(a) Wieviele Funktionen $f \in PT \to PF$ mit $\forall A \in PT\colon\ A \models\!\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\!\mid\ \mathbf{K}(f(A))$ gibt es?

(b) Ist jede dieser Funktionen injektiv?

(c) Ist jede dieser Funktionen surjektiv?

(d) Wieviele Funktionen $f \in PF \to PT$ mit $\forall S \in PF\colon\ \widehat{f(S)} \models\!\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\!\mid\ \mathbf{D}S$ gibt es?

Aufgabe 5.3 Vier Freundinnen vereinbaren Regeln für eine Party:

(i) Wer mit Rolf tanzt, muss auch mit Klaus und Markus tanzen.

(ii) Wer nicht mit Rolf tanzt, darf nicht mit Klaus tanzen, muss aber mit Christoph tanzen.

(iii) Wer nicht mit Klaus tanzt, darf nicht mit Christoph tanzen.

Sie sollen diese Regeln in möglichst einfacher Form darstellen.

(a) Beschreiben Sie jede der drei Regeln mit einer Booleschen Formel. Verwenden Sie dabei nur die Variablen C (Christoph), K (Klaus), M (Markus) und R (Rolf).

(b) Geben Sie die konjunktive Primform für die Konjunktion der Regeln an.

(c) Geben Sie die disjunktive Primform für die Konjunktion der Regeln an.

(d) Geben Sie den Primbaum für die Konjunktion der Regeln an.

Aufgabe 5.4 Sei $X < Y < Z$ und sei A eine Formel mit

$$\forall \sigma \in Var \to \mathbb{B}\colon\ \mathcal{T}(A)\sigma = 1 \iff \sigma X + \sigma Y + \sigma Z \geq 1$$

(a) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.

(b) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.

(c) Geben Sie den Primbaum für A an.

(d) Geben Sie den Primbaum für $\widehat{A}$ an.

(e) Geben Sie die konjunktive Primform für $\widehat{A}$ an.

Aufgabe 5.5 Bestimmen Sie (von Hand) zwei äquivalente Primbäume zu der Formel (X, YU, ZV). Verwenden Sie die folgenden Variablenordnungen:

(a) $X < Y < U < V < Z$

(b) $U < V < X < Y < Z$

Aufgabe 5.6 Geben Sie eine Boolesche Formel A an, sodass die konjunktive Primform von A gleich der disjunktiven Primform von A ist.

Aufgabe 5.7 Geben Sie eine Boolesche Formel A an mit $SV(A) = \{X, Y\}$ (signifikante Variablen) und $VV(A) = \{X, Y, U, V\}$ (vorkommende Variablen).

Aufgabe 5.8 Geben Sie eine Boolesche Formel A an, sodass

$$\mathcal{M}(A) = \{\, \sigma \in \Sigma \mid \sigma X - \sigma Y = \sigma Z \,\}$$

Aufgabe 5.9 Geben Sie eine Funktion $f \in \Sigma \to \mathbb{B}$ an, sodass es keine Boolesche Formel A mit $\mathcal{T}(A) = f$ gibt, wenn die Menge der Variablen unendlich ist.

Aufgabe 5.10 Geben Sie die größte Menge M von Booleschen Formeln an, die sich in die Menge

$$\{\, A \in DT \mid SV(A) = \{X, Y\} \ \wedge\ A \text{ ist Primbaum} \,\}$$

übersetzen lässt. Natürlich sollen Sie M beschreiben, ohne die Begriffe Entscheidungs- und Primbaum zu verwenden.

Aufgabe 5.11 Sei A die Boolesche Formel

$$\neg((X \vee Z) \Rightarrow (X \wedge \neg Y \wedge Z)) \quad \Rightarrow \quad (X \wedge Y \wedge Z)$$

und seien X, Y, Z drei verschiedene Variablen.

(a) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.

(b) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.

(c) Geben Sie die konjunktive Primform für $\widehat{A}$ an.

(d) Geben Sie die konjunktive Primform für $\neg A$ an.

(e) Geben Sie die disjunktive Primform für $X \vee A$ an.

(f) Geben Sie die signifikanten Variablen für $Z \vee A$ an.

(g) Geben Sie die signifikanten Variablen für $Y \vee A$ an.

(h) Geben Sie die Primbäume für A und $\widehat{A}$ an ($X < Y < Z$).

Aufgabe 5.12 Erweitern Sie Ihre Sammlung von Primbaumalgorithmen aus Aufgabe 4.6 um eine Prozedur `nor:dt*dt→dt`, die zu zwei Primbäumen A, B den zu $A \mathbin{\bar{\vee}} B$ äquivalenten Primbaum liefert. Benutzen Sie dabei nur die Hilfsprozedur `red:var*dt*dt→dt` mit

```
fun red (t as (_, a, b)) = if a=b then a else D(t)
```

Aufgabe 5.13 Geben Sie eine strukturell rekursive Prozedur $cnf \in DT \to CF$ an, sodass für jeden geordneten Entscheidungsbaum A gilt: $cnf(A)$ ist eine bereinigte KNF für A, die nur Variablen enthält, die in A vorkommen.

Aufgabe 5.14 Sei $X < Y < Z$ und $A = (X \Leftrightarrow Y \Leftrightarrow Z)$.

(a) Zeichnen Sie $\pi(A)$.

(b) Zeichnen Sie einen minimalen Entscheidungsgraphen, der gerade die Teilbäume von $\pi(A)$ und $\pi(\overline{A})$ darstellt. Vermerken Sie in Ihrer Zeichnung, welche Knoten die folgenden Bäume darstellen:

$$\pi(A), \quad \pi(\overline{A}), \quad \pi(\widehat{A}), \quad \pi(Y \Leftrightarrow Z), \quad \pi(\overline{Y \Leftrightarrow Z}), \quad \pi(\widehat{Y \Leftrightarrow Z})$$

(c) Geben Sie eine Tabellendarstellung Ihres Entscheidungsgraphen an:

i	$\gamma(i)$	
2	$(Z, 0, 1)$	Z
3	$(Z, 1, 0)$	$\overline{Z}$
...	...	...

Geben Sie zu jedem Knoten eine Formel an, die äquivalent zu dem durch die Knoten dargestellten Primbaum ist.

(d) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.

(e) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.

Aufgabe 5.15 Sei $X < Y < Z$. Geben Sie die Kardinalitäten der folgenden Mengen an:

(a) $\{ A \in PT \mid A = \widehat{A} \text{ und } VV(A) = \{X\} \}$

(b) $\{ A \in PT \mid A = \widehat{A} \text{ und } VV(A) = \{X, Y\} \}$

(c) $\{ A \in PT \mid A = \widehat{A} \text{ und } VV(A) = \{X, Y, Z\} \}$

(d) $\{ A \in PT \mid A = \widehat{A} \text{ und } VV(A) \subseteq \{X, Y, Z\} \}$

Aufgabe 5.16 Sei $X < Y < Z$. Geben Sie die Kardinalitäten der folgenden Mengen an:

(a) $\{ A \in PT \mid VV(A) \subseteq \{X, Y, Z\} \}$

(b) $\{ \mathcal{T}(A) \mid A \in \mathit{For} \text{ und } VV(A) \subseteq \{X, Y, Z\} \}$

(c) $\{ S \text{ Primform} \mid VV(S) \subseteq \{X, Y, Z\} \}$

(d) $\{ A \in PT \mid VV(A) = \{X, Y\} \}$

Aufgabe 5.17 Geben Sie zwei Klauselformen S und S' an, sodass $S \not\models\!\!\!\mid S'$ und $\mathbf{K}S \models\!\!\!\mid \mathbf{K}S'$.