6. Übungsblatt zu Einführung in die Computationale Logik, SS 2003

Prof. Dr. Gert Smolka, Marco Kuhlmann, MSc
http://www.ps.uni-sb.de/courses/cl-ss03/

Lesen Sie im Skript: Abschnitte 10.1–10.4 und Kapitel 2 aus dem Skript Programmierung

Aufgabe 6.1: Englisch nach ETT Stellen Sie die folgenden Aussagen als mathematische Aussagen dar:

(a) Everybody loves somebody.

(b) Somebody loves somebody.

(c) Everybody loves everybody.

(d) Nobody loves everybody.

(e) Somebody loves nobody.

Verwenden Sie dabei die Typkonstante *person* und die Termkonstante $\mathit{loves} : \mathit{person} \to \mathit{person} \to \mathbb{B}$. Außerdem können Sie die üblichen logischen Konstanten verwenden.

Aufgabe 6.2: Englisch nach ETT Stellen Sie die folgenden Aussagen als mathematische Aussagen dar:

(a) You can fool some of the people some of the time.

(b) You can fool all the people some of the time.

(c) You can't fool all the people all the time.

(d) You can't fool a person all the time.

Verwenden Sie dabei die Typkonstanten *person* und *time* und die Termkonstante $\mathit{fool} : \mathit{person} \to \mathit{time} \to \mathbb{B}$. Außerdem können Sie die üblichen logischen Konstanten verwenden.

Aufgabe 6.3 Seien die folgenden Primitive gegeben:

$$\begin{array}{rcl} \neg & \in & \mathbb{B} \to \mathbb{B} \\ \wedge & \in & \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B} \\ \exists & \in & (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B} \\ + & \in & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ \cdot & \in & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ \leq & \in & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B} \end{array}$$

Beschreiben Sie die folgenden Werte mithilfe dieser Primitive. Nachdem ein Wert definiert wurde, können Sie ihn unter dem angegeben Namen benutzen:

(a) Gleichheit $= \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$;

(b) Kleiner-Test $< \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$;

(c) Disjunktion $\vee \in \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$;

(d) Implikation $\Rightarrow \in \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$;

(e) universelle Quantifizierung $\forall \in (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$;

(f) eine Funktion $\mathit{min} \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$, die zu x, y, z genau dann 1 liefert, wenn z das Minimum von x und y ist;

(g) eine Funktion $\mathit{eins} \in \mathbb{N} \to \mathbb{B}$, die zu x genau dann 1 liefert, wenn $x = 1$ gilt;

(h) eine Funktion $\mathit{teilt} \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$, die zu x, y genau dann 1 liefert, wenn x ein Teiler von y ist;

(i) eine Funktion $\mathit{mod} \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$, die zu x, y, z genau dann 1 liefert, wenn z der Rest der Division von x durch y ist;

(j) eine Funktion $\mathit{ggt} \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$, die zu x, y, z genau dann 1 liefert, wenn z der größte gemeinsame Teiler von x und y ist;

(k) eine Funktion $\mathit{beschränkt} \in (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$, die testet, ob ihr Argument eine nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$ darstellt;

(l) eine Funktion $\mathit{max} \in (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$, die zu f und x genau dann 1 liefert, wenn f eine nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$ darstellt, deren größtes Element x ist.

Aufgabe 6.4: Auswahloperator Seien die folgenden Primitive gegeben:

$$\begin{aligned}
\neg &\in \mathbb{N} \to \mathbb{B} \\
\wedge &\in \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B} \\
\vee &\in \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B} \\
+ &\in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
\cdot &\in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
\leq &\in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B} \\
= &\in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}
\end{aligned}$$

Zusätzlich sei ein so genannter Auswahloperator

$$\epsilon \in (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{N}$$

gegeben, der zu jeder nichtleeren Teilmenge M von $\mathbb{N}$ ein Element von M liefert. Formaler gesprochen soll gelten:

$$\forall f \in \mathbb{N} \to \mathbb{B}\colon\ (\exists x \in \mathbb{N}\colon\ f\,x) \implies f\,(\epsilon f)$$

Beschreiben Sie die folgenden Werte mithilfe dieser Primitive. Nachdem ein Wert definiert wurde, können Sie ihn unter dem angegeben Namen benutzen:

(a) $0 \in \mathbb{N}$;

(b) den Existenzquantor $\exists \in (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$;

(c) $1 \in \mathbb{N}$;

(d) die Subtraktion $- \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;

(e) eine Funktion $\mathit{if} \in \mathbb{B} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die zu b, x, y abhängig von b den Wert x oder y liefert (x falls $b = 1$, sonst y);

(f) eine Funktion $\mathit{max} \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die das Maximum zweier Zahlen liefert;

(g) eine Funktion $d \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die für x, y das Ergebnis der ganzzahligen Division von x duch y liefert, falls $y > 0$. (Beispielsweise soll $d(7)(3) = 2$ gelten.)

Aufgabe 6.5: Schönfinkels U-Kombinator Sei X eine nichtleere Menge und sei der so genannte U-Kombinator für X wie folgt definiert:

$$U \in (X \to \mathbb{B}) \to (X \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$$
$$U f g = \forall x \in X : \neg(f x \wedge g x)$$

Wenn man f und g als Teilmengen von X auffasst, testet U also gerade, ob f und g disjunkt sind. Beschreiben Sie die folgenden Funktionen mithilfe von U:

(a) die Negation $\neg \in \mathbb{B} \to \mathbb{B}$;

(b) die Konjunktion $\wedge \in \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$;

(c) den Allquantor $\forall \in (X \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$;

(d) den Existenzquantor $\exists \in (X \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$.

Aufgabe 6.6: Unendliche Teilmengen Sie sollen das Prädikat „X ist eine unendliche Teilmenge von M“ mit ETT beschreiben.

(a) Geben Sie ein Prädikat $\mathit{injektiv} \in (\mathbb{N} \to M) \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein Argument eine injektive Funktion ist.

(b) Geben Sie ein Prädikat $\mathit{unendlich} \in (M \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein Argument eine unendliche Teilmenge von M darstellt.

Aufgabe 6.7: Primzahlen Sie sollen die Aussage „Es gibt unendlich viele Primzahlen“ mit ETT beschreiben und dabei nur Variablen des Typs $\mathbb{N}$ quantifizieren. Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben.

(a) Geben Sie ein Prädikat $\mathit{teilt} \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein erstes Argument ein Teiler seines zweiten Arguments ist.

(b) Geben Sie ein Prädikat $\mathit{prim} \in \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein Argument eine Primzahl ist.

(c) Geben Sie ein Prädikat $\mathit{unendlich} \in (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein Argument eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ darstellt.

(d) Stellen Sie die Aussage „Es gibt unendlich viele Primzahlen“ mit den obigen Prädikaten dar.

Aufgabe 6.8: Induktionssatz In typgerechter Form lässt sich der Induktionssatz wie folgt formulieren:

> Sei X eine Menge. Sei $A \subseteq X$ und $\succ$ eine terminierende Relation auf X. Dann gilt $X \subseteq A$, falls $\forall x \in X\colon\ \{ y \in X \mid x \succ y \} \subseteq A \Longrightarrow x \in A$.

Sie sollen den Induktionssatz für eine Menge X in ETT formulieren. Dabei sollen Sie nur die primitiven Typen $\mathbb{B}$, $\mathbb{N}$ und X verwenden. Für $\mathbb{N}$ können Sie $+$ und 1 verwenden. Ansonsten stehen Ihnen nur noch die Booleschen Operationen und die Quantoren zur Verfügung.

(a) Geben Sie ein Prädikat *induktion* $\in (X \to \mathbb{B}) \to (X \to X \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ an, das die Aussage des Induktionssatzes für eine Teilmenge $A \subseteq X$ und eine terminierende Relation $\succ$ formuliert.

(b) Geben Sie ein Prädikat *terminiert* $\in (X \to X \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein Argument eine terminierende Relation darstellt.

(c) Formulieren Sie den Induktionssatz.

Aufgabe 6.9: ETT-Terme Sei $\lambda fgx.g(fx)x$ ein Term mit $\tau g = \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie die Typen der Variablen f und x an.

(b) Geben Sie den Typ des Terms an.

(c) Geben Sie die de Bruijnsche Darstellung des Terms an.

(d) Geben Sie die Stufe des Terms an.

(e) Geben Sie die Variablen f, g, x als Paare (n, t) an. Nehmen Sie dabei an, dass der Term α-normal ist.

Aufgabe 6.10: Stufe von Typen und Termen

(a) Geben Sie einen möglichst einfachen Typ der Stufe 4 an. Verwenden Sie dabei nur die Typkonstante $\mathbb{N}$.

(b) Geben Sie einen möglichst einfachen geschlossenen Term der Stufe 2 an, der ohne Termkonstanten gebildet ist.

Aufgabe 6.11: Beschreibung einer Aussage Betrachten Sie die folgende abkürzende Beschreibung einer mathematische Aussage:

$$\forall X\ \exists m\ (X\ m \wedge \forall x\ (X\ x \Longrightarrow m \leq x))$$

Dabei haben die Konstanten $\wedge$ und $\Longrightarrow$ ihre übliche Bedeutung. Bei $\leq$ handelt es sich um den kleiner-gleich-Test $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ für natürliche Zahlen.

(a) Welche Typen haben die quantifizierten Variablen?

(b) Welche Typen haben die verwendeten Quantorkonstanten $\forall_1$, $\exists$, $\forall_2$ (in der Reihenfolge ihres Auftretens)?

(c) Stellen Sie die Aussage durch einen Standard-ML-Ausdruck dar. Verwenden Sie dabei die Bezeichner `all1`, `some`, `and`, `all2`, `impl`, `le` für die Konstanten $\forall_1$, $\exists$, $\wedge$, $\forall_2$, $\Longrightarrow$, $\leq$.

(d) Geben Sie die Baumdarstellung der Aussage an. Stellen Sie dabei gebundene Variablen mit de Bruijn-Indizes dar.

(e) Geben Sie den Wert der Aussage an. Nehmen Sie dabei an, dass alle Konstanten wie üblich interpretiert werden.