7. Übungsblatt zu Einführung in die Computationale Logik, SS 2003

Prof. Dr. Gert Smolka, Marco Kuhlmann, MSc
http://www.ps.uni-sb.de/courses/cl-ss03/

Lesen Sie im Skript: Kapitel 10 (Achtung: neue Version!)

Aufgabe 7.1: Normalformen Seien die Variablen $x = (2, \mathbb{N})$, $y = (0, \mathbb{N})$, $z = (1, \mathbb{N})$ und der Term $\lambda xy.u(\lambda z.vxz)(\lambda z.wxy((\lambda z.z)z))$ gegeben.

(a) Geben Sie die de Bruijnsche Darstellung des Terms an.

(b) Geben Sie die α-Normalform des Terms an.

(c) Geben Sie die λ-Normalform des Terms an.

Aufgabe 7.2: Normalformen Bestimmen Sie die $\beta\eta$-Normalform der folgenden Terme:

(a) $(\lambda z.a)(\lambda xy.\,fxy)$

(b) $(\lambda xu.x)(\lambda vy.y)$

(c) $(\lambda xy.\,fxy)ab$

(d) $(\lambda f.\,f(a))(\lambda xy.\,fxy)b$

(e) $(\lambda z.(\lambda xy.\,fxy)((\lambda z.z)z))ab$

(f) $(\lambda fgx.\,fx(gx))(\lambda xy.x)(\lambda xz.x)$

Aufgabe 7.3: Substitution Bestimmen Sie die $\beta\eta$-Normalformen der folgenden Terme:

(a) $(\lambda xy.z(ux)(uy))[z := vxy]$.

(b) $(\lambda xy.z((\lambda x.ux)x)(uy))[z := vxy]$.

(c) $(\lambda xy.z((\lambda x.ux)x)(uy))[z := (\lambda xy.vxy)xy]$.

Aufgabe 7.4: Church-Numerale Seien die folgenden Abkürzungen für Terme definiert:

$$\begin{aligned} N_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda fx.x \\ N_n &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda fx.N_{n-1}\,f(fx) \\ add &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda ghfx.gf(hfx) \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass die folgenden Äquivalenzen gelten (λ-Äquivalenz):

(a) $add\ g\ N_0 \models\!\!\!\mid add\ N_0\ g$

(b) $add\ N_{24}\ N_0 \models\!\!\!\mid add\ N_0\ N_{24}$

(c) $add\ N_1\ N_2 \models\!\!\!\mid add\ N_2\ N_1$

Aufgabe 7.5: Lambda-Elimination Wir betrachten die folgenden Terme:

(i) $\lambda xy.y$

(ii) $\lambda xyz.y$

(iii) $\lambda xyz.x$

(iv) $\lambda x.\,fx(fxx)$

(a) Geben Sie zu jedem der Terme einen $\mathcal{A}$-äquivalenten kombinatorischen Term an. Nehmen Sie dabei an, dass die Struktur $\mathcal{A}$ die Kombinatoren I, K, S wie üblich interpretiert.

(b) Geben Sie für Ihre kombinatorischen Terme aus (a) für jedes Auftreten der Kombinatoren I, K, S den passen Typ an. Nehmen Sie dabei die folgenden Typen an:

$$\tau x = \tau y = \tau z = b \qquad \tau f = b \to b \to b$$

Aufgabe 7.6: Reduktion auf Gleichheit Beschreiben Sie die Werte $\vee, \Rightarrow \in \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ und $\exists \in (\mathbb{B} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ mithilfe von Gleichheitsprädikaten. Hinweis: Beschreiben Sie zuerst 0, 1, $\wedge$, $\neg$ und $\forall$. Werte, die Sie bereits beschrieben haben, können Sie direkt verwenden.

Aufgabe 7.7: Quantoren Geben Sie jeweils Funktionen $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ an, für die gilt:

(a) $\exists x\colon\ fx \wedge gx \neq (\exists x\colon\ fx) \wedge (\exists x : gx)$

(b) $\forall x\colon\ fx \vee gx \neq (\forall x\colon\ fx) \vee (\forall x : gx)$

Aufgabe 7.8: Äquivalenz Seien die Konstanten

$$\leq\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B} \qquad \wedge\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B} \qquad \exists\colon (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B} \qquad 1\colon \mathbb{B}$$

wie üblich interpretiert.

(a) Geben Sie die $\beta\eta$-Normalform zu $\exists x.y \leq x$ an. Hinweis: $y \leq x$ ist eine Abkürzung für $(\leq)\ y\ x$.

(b) Geben Sie zu $(\lambda g.gxy \wedge gxz)(\lambda xy.x \leq y \wedge y \leq x)$ einen λ-äquivalenten kombinatorischen Term an.

(c) Sei M der Term aus (b). Geben Sie zu $\exists x \exists y\colon\ M$ einen möglichst einfachen Term an, der für jede Struktur, die die Konstanten $\leq$, $\wedge$ und $\exists$ wie üblich interpretiert, äquivalent zu $\exists x \exists y\colon\ M$ ist.

Aufgabe 7.9: Typen

(a) Betrachten Sie den Term $(\forall x \exists y\colon\ fxy) \doteq (\exists z \forall x\colon\ fx(zx))$.

Geben Sie die Typen von $\forall$, $\exists_1$, $\exists_2$, f und z an. Nehmen Sie dabei an, dass $\tau x = X$ und $\tau y = Y$ gilt.

(b) Betrachten Sie den Term $0 \doteq \big((\lambda x.x) \doteq (\lambda x.1)\big)$.

Geben Sie die Typen von $\doteq_1$, x und $\doteq_2$ an. Nehmen Sie dabei an, dass $\tau 0 = \tau 1 = \mathbb{B}$ gilt.

(c) Betrachten Sie den Term $Sf(Ka)$.

Geben Sie die Typen von S, K und a an. Nehmen Sie dabei an, dass $\tau f = X \to Y \to Z$ gilt und dass S und K die Kombinatoren für λ-Elimination sind.

Aufgabe 7.10: Quantoren Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Quantoren. Verwenden Sie dabei die im Skript angegebenen Quantorengesetze und die η-Regel.

(a) $\exists x \exists x\colon\ fx = \exists f$

(b) $\forall x\colon\ fx \le \exists x\colon\ fx$

(c) $\forall x\colon\ fx \Rightarrow b = \exists f \Rightarrow b$

Aufgabe 7.11: Pränexform Ein Term ist in $\exists\forall$-Pränexform, wenn er die Form

$$\exists x_1 \dots \exists x_m \forall y_1 \dots \forall y_n M$$

hat, wobei $m, n \ge 0$ gelten soll und M ein Term ist, der keine Quantorenkonstanten enthält. Bestimmen Sie zu den folgenden Termen $\mathcal{A}$-äquivalente Terme in $\exists\forall$-Pränexform. Nehmen Sie dabei an, dass die Struktur $\mathcal{A}$ die logischen Konstanten $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\Rightarrow$ wie üblich interpretiert.

(a) $(\forall x\colon\ fx) \wedge (\exists x\colon gx)$

(b) $\forall x \forall y \exists z\colon\ fxyz$

(c) $\forall x\colon (\forall y\colon\ fxy) \Rightarrow (\forall y\colon gxy)$

Aufgabe 7.12: Beweis mit Tautologie Sei $f \in \mathbb{B} \to \mathbb{B}$. Beweisen Sie:

$$\forall(\lambda b \in \mathbb{B} \,.\, b \Leftrightarrow b \wedge fb) = \forall(\lambda b \in \mathbb{B} \,.\, b \Rightarrow fb)$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für alle $x, y \in \mathbb{B}$ gilt: $(x \Leftrightarrow x \wedge y) = (x \Rightarrow y)$.