8. Übungsblatt zu
Einführung in die Computationale Logik, SS 2003

Prof. Dr. Gert Smolka, Marco Kuhlmann, MSc
`http://www.ps.uni-sb.de/courses/cl-ss03/`

Lesen Sie im Skript: Kapitel 5

Aufgabe 8.1: Rekursive Definition von Mengen Sei $Q \subseteq \mathbb{Z}$ durch die folgenden Inferenzregeln definiert:

$$\frac{}{4 \in Q} \qquad \frac{x \in Q \qquad y \in Q}{((x+y) \bmod 5) \in Q}$$

(a) Geben Sie die durch die Inferenzregeln beschriebene Grundregelmenge R an.

(b) Geben Sie die Mengen $\hat{R}^0(\emptyset)$, $\hat{R}^1(\emptyset)$, $\hat{R}^2(\emptyset)$, $\hat{R}^3(\emptyset)$ und $\hat{R}^4(\emptyset)$ an.

(c) Beschreiben Sie Q ohne Inferenzregeln und ohne Rekursion.

(d) Geben Sie die Menge $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \hat{R}^i(\emptyset)$ an.

(e) Geben Sie den kleinsten Fixpunkt von $\hat{R}$ an.

(f) Geben Sie das kleinste $P \subseteq \mathbb{Z}$ an mit $\hat{R}(P) \subseteq P$.

Aufgabe 8.2: Rekursive Definition von Mengen Sei $Q \subseteq \mathbb{Z}^3$ durch die folgenden Inferenzregeln definiert:

$$\frac{m \in \mathbb{N}}{(m, 0, m) \in Q} \qquad \frac{n \in \mathbb{N}}{(0, n, n) \in Q} \qquad \frac{(m, n, k) \in Q}{(m+1, n+1, k+1) \in Q}$$

(a) Geben Sie die durch die Regeln beschriebene Grundregelmenge an.

(b) Sei $P = \{\, (m, n, k) \in \mathbb{Z}^3 \mid k = \max\{m, n\} \,\}$. Beweisen Sie $Q \subseteq P$ durch Regelinduktion.

(c) Beweisen Sie durch Induktion über n: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\colon\ (n, m, \max\{n, m\}) \in Q$.

Aufgabe 8.3: Rekursive Definition von Mengen Sei $Q \subseteq \mathbb{N}^2$ durch die folgenden Inferenzregeln definiert:

$$\frac{}{(0, 0) \in Q} \qquad \frac{(n, m) \in Q}{(n+1, 2n+m+1) \in Q}$$

(a) Geben Sie die durch die Inferenzregeln beschriebene Grundregelmenge R an.

(b) Geben Sie die Mengen $\hat{R}^0(\emptyset)$, $\hat{R}^1(\emptyset)$, $\hat{R}^2(\emptyset)$, $\hat{R}^3(\emptyset)$ und $\hat{R}^4(\emptyset)$ an.

(c) Bei Q handelt es sich um eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Beschreiben Sie Q durch einen Lambda-Ausdruck (ohne Rekursion).

(d) Sei $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die durch Ihren Lambda-Ausdruck beschriebene Funktion. Sie sollen beweisen, dass $f = Q$ gilt. Dafür sind zwei Teilbeweise erforderlich.

(i) Beweisen Sie durch natürliche Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ (n, fn) \in Q$.

(ii) Beweisen Sie durch Regelinduktion, dass $Q \subseteq f$.

Aufgabe 8.4: Fixpunkte Gegeben sei eine n-elementige Menge X. Wieviele Funktionen $X \to X$ gibt es, die genau n Fixpunkte haben? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8.5: Triviale Ordnung mit $\perp$ Sei X eine Menge, $\perp \notin X$ und $X_\perp = X \cup \{\perp\}$. Wir definieren auf $X_\perp$ eine partielle Ordnung wie folgt:

$$x \le x' \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad x = \perp \text{ oder } x = x'$$

(a) Geben Sie eine Kette $x_0 \le x_1 \le \cdots$ an, die genau zwei verschiedene Elemente hat.

(b) Wieviele Elemente kann die Elementmenge $\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ einer Kette $x_0 \le x_1 \le \cdots$ haben?

(c) Ist $X_\perp$ mit der angegebenen Ordnung eine VPO?

Aufgabe 8.6: Approximation von Funktionen Gegeben sei die folgende rekursive Prozedurdeklaration:

```
fun max(m,n) = if m=0 then n
               else if n=0 then m
                    else 1 + max(m-1,n-1)
val max : int * int → int
```

(a) Geben Sie das der Deklaration entsprechende Funktional `maxFun` an.

(b) Geben Sie die ersten vier Approximationen für `max` an.

(c) Geben Sie eine Prozedur `approx: int → (int * int) → int` an, die zu $k \in \mathbb{N}$ die k-te Approximation für `max` liefert.

Aufgabe 8.7: Unstetige Funktionen Sei die VPO $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ gegeben. Geben Sie eine Funktion $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ an, die monoton, aber nicht stetig ist.

Aufgabe 8.8: Unstetige Funktionen Sei die VPO $(\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp,\ \le)$ gegeben. Geben Sie eine Funktion $F \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp)$ an, die monoton aber nicht stetig ist.

Aufgabe 8.9: Regeln mit unendlich vielen Prämissen Sei X eine Menge und $R \subseteq \mathcal{P}(X) \times X$. Wir definieren:

$$\hat{R} \in \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$
$$\hat{R}(A) = \{ x \mid \exists B \subseteq A\colon\ (B, x) \in R \}$$

Geben Sie eine Menge $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ an, so dass $\hat{R}$ nicht stetig ist (bezüglich der VPO $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$). Beweisen Sie diese Aussage. Hinweis: Es genügt ein R mit genau einem Element.

Aufgabe 8.10: Stationäre VPOs Sei $(X, \le)$ eine partielle Ordnung, sodass für jede Kette $x_0 \le x_1 \le \cdots$ in X ein k existiert, sodass $\forall n \ge k\colon\ x_n = x_k$ gilt.

(a) Warum hat jede Kette in X ein Supremum?

(b) Warum ist jede monotone Funktion $X \to X$ stetig?

(c) Geben Sie eine partielle Ordnung $(\mathbb{N}, \preceq)$ mit der obigen Eigenschaft an.

Aufgabe 8.11: Punktweise geordnete Funktionen Sei X eine Menge und $(Y, \le)$ eine VPO mit einem kleinsten Element $\perp$. Wir definieren auf $X \to Y$ eine partielle Ordnung:

$$f \le f' \iff \forall x \in X\colon\ fx \le f'x$$

(a) Geben Sie das kleinste Element von $X \to Y$ an.

(b) Geben Sie das Supremum einer Kette $f_0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$ in $X \to Y$ an.

(c) Ist $X \to Y$ zusammen mit der angegeben partiellen Ordnung eine VPO?

Aufgabe 8.12 Geben Sie eine VPO $(X, \preceq)$ wie folgt an:

(ii) Es gibt kein kleinstes Element.

(iiii) Es gibt eine stetige Funktion $X \to X$, die keinen Fixpunkt hat.

Geben Sie die Funktion aus (ii) an. Hinweis: Betrachten Sie die stationäre VPO $(\mathbb{N}, \preceq)$ aus Aufgabe 8.10 (c).