



9. Übungsblatt zu Einführung in die Computationale Logik, SS 2003

Prof. Dr. Gert Smolka, Marco Kuhlmann, MSc
<http://www.ps.uni-sb.de/courses/cl-ss03/>

Lesen Sie im Skript: Kapitel 6 (Achtung: Neue Version!)

Aufgabe 9.1: Denotationale Semantik für IMP Sie sollen die denotationale Semantik von IMP in Standard ML implementieren. Verwenden Sie dabei die folgenden Deklarationen:

```
type con = int
type loc = string

datatype aexp = Con of con | Loc of loc | Add of aexp * aexp

datatype bexp = LE of aexp * aexp

datatype com = Assign of loc * aexp
              | Seq   of com * com
              | If    of bexp * com * com
              | While of bexp * com

type sigma = loc -> int

fun fix f x = f (fix f) x
```

Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Implementieren Sie die denotationale Semantik für arithmetische Ausdrücke:

```
val da : aexp -> sigma -> int
```

(b) Implementieren Sie die denotationale Semantik für Boolesche Ausdrücke:

```
val db : bexp -> sigma -> bool
```

(c) Implementieren Sie die Hilfsfunktion für Schleifen:

```
val gamma : (sigma -> bool) * (sigma -> sigma) ->
            (sigma -> sigma) -> (sigma -> sigma)
```

(d) Implementieren Sie die denotationale Semantik für Kommandos:

```
val dc : com -> sigma -> sigma
```

Aufgabe 9.2: Operationale Semantik In Abschnitt 6.2 wird die operationale Semantik von IMP definiert. Die angegebenen Inferenzregeln beschreiben eine Menge von Grundregeln wie in Abschnitt 5.4 beschrieben.

- (a) Geben Sie die Grundmenge X an.
- (b) Geben Sie die durch die Regel für Zuweisungen beschriebene Grundregelmenge an.
- (c) Geben Sie die durch die erste Regel für Konditionale beschriebene Grundregelmenge an.
- (d) Beschreiben Sie die durch die operationale Semantik definierte Menge $I_R \subseteq X$ mithilfe der Denotationsfunktion C .

Aufgabe 9.3: Until-Schleifen Wir erweitern IMP um Until-Schleifen, für die die folgende Äquivalenz gelten soll:

$$\text{do } c \text{ until } b \models c ; \text{if } b \text{ then skip else do } c \text{ until } b$$

- (a) Beschreiben Sie $\text{do } c \text{ until } b$ mit einem regulären Programm.
- (b) Erweitern Sie die operationale Semantik von IMP um passende Regeln für Until-Schleifen.
- (c) Erweitern Sie die denotationale Semantik von IMP um eine passende Gleichung für Until-Schleifen. Verwenden Sie dabei eine Hilfsfunktion Γ , die das Tripel $(\mathcal{B}(b), C(c))$ als Argument bekommt.

Aufgabe 9.4: For-Schleifen Wir erweitern IMP um For-Schleifen, für die die folgende Äquivalenz gelten soll:

$$\text{for } X \text{ to } a \text{ do } c \models \text{if } X \leq a \text{ then } c ; X := X + 1 ; \text{for } X \text{ to } a \text{ do } c \text{ else skip}$$

- (a) Geben Sie mithilfe einer For-Schleife ein Kommando ohne While-Schleife an, das für jeden Anfangszustand divergiert.
- (b) Beschreiben Sie $\text{for } X \text{ to } a \text{ do } c$ mit einem regulären Programm.
- (c) Erweitern Sie die operationale Semantik von IMP um passende Regeln für For-Schleifen.
- (d) Erweitern Sie die denotationale Semantik von IMP um eine passende Gleichung für For-Schleifen. Verwenden Sie dabei eine Hilfsfunktion Γ , die das Tripel $(X, \mathcal{A}(a), C(c))$ als Argument bekommt.

Aufgabe 9.5 Geben Sie ein zu fail äquivalentes einfaches Programm an.

Aufgabe 9.6 Geben Sie ein einfaches Programm an, das die folgende Relation beschreibt: $\{ (\sigma, \sigma[Z := \sigma X \cdot \sigma Y][X' := 0]) \mid \sigma \in \Sigma \wedge \sigma X \geq 0 \wedge \sigma Y \geq 0 \}$.

Aufgabe 9.7 Beschreiben Sie die folgenden Relationen durch reguläre Programme, die keine Tests verwenden:

(a) $\{ (\sigma, \sigma[X := n]) \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 5 \}$

(b) $\{ (\sigma, \sigma[X := \sigma X + 2n]) \mid n \in \mathbb{N} \}$

Aufgabe 9.8 Geben Sie eine operationale Semantik für reguläre Programme an mit

$$\forall \sigma \in \Sigma, p \in \mathcal{RP}, \sigma' \in \Sigma: \sigma \vdash p \Rightarrow \sigma' \Leftrightarrow (\sigma, \sigma') \in \mathcal{Rp}.$$

Orientieren Sie sich dabei an der operationalen Semantik von IMP.

Aufgabe 9.9 Beweisen Sie mit Hilfe der Äquivalenzen für reguläre Programme:

(a) $\text{fail}^* \models \text{skip}$

(b) $\text{skip}^* \models \text{skip}$

Aufgabe 9.10 Beweisen Sie mit Hilfe der Äquivalenzen für reguläre Programme:

(a) $\text{while } b \text{ do skip} \models (\neg b)?$

(b) $\text{while true do } p \models \text{fail}$

(c) $\text{while } b \text{ do fail} \models (\neg b)?$

Aufgabe 9.11 Beweisen Sie mit Hilfe der Äquivalenzen für reguläre Programme:

(a) $p + p^* \models p^*$

(b) $p ; p + p^* \models p^*$

(c) $b? + \text{skip} \models \text{skip}$