3. Übungsblatt zu Computationale Logik, SS 2004

Prof. Dr. Gert Smolka, Marco Kuhlmann (MSc)
http://www.ps.uni-sb.de/courses/cl-ss04/

Lesen Sie im Skript: das Kapitel über Typtheorie (neue Version!)

Aufgabe 3.1 Sei ein Kontext mit

- einer Typkonstanten T,
- Wertkonstanten $0 : T$, $f, g : T \to T$, $+, \cdot : T \to T \to T$ und
- Variablen $x, y, z, u : T$

gegeben, in dem die folgenden Gleichungen universell gültig sind:

$$x \cdot x = x \tag{1}$$
$$x \cdot y = y \cdot x \tag{2}$$
$$x \cdot fx = 0 \tag{3}$$
$$x + 0 = x \tag{4}$$
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \tag{5}$$
$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \tag{6}$$

a) Beweisen Sie mit den Gleichheitsregeln:

   (i) $x \cdot 0 \equiv 0$

   (ii) $x \cdot (x + y) \equiv x$

   (iii) $\lambda x. g(x \cdot (x + y)) \equiv \lambda y. g(y \cdot y)$

   (iv) $(\lambda xy. x \cdot ((x + y) \cdot y))(u + 0)((\lambda g. gu \cdot gu)f) \equiv 0$

   Geben Sie Ihren Beweis in der im Skript angegebenen Form an. Achten Sie darauf, bei jedem Schritt alle verwendeten Regeln anzugeben.

b) Geben Sie Interpretationen für die angegebenen Konstanten an, so dass die Gleichungen (1)–(6) universell gültig sind und

   (i) $\mathcal{D}T$ genau 2 Elemente hat,

   (ii) $\mathcal{D}T$ genau 4 Elemente hat,

   (iii) $\mathcal{D}T$ unendlich viele Elemente hat.

Aufgabe 3.2 Beweisen Sie die im Skript angegebene Koinzidenz-Proposition (1.6.2).

Aufgabe 3.3 Die folgenden Fragen sollen Ihnen beim Verständnis des Stoffes helfen.

a) Geben Sie die Beta-Regel an.

b) Geben Sie die Eta-Regel an.

c) Kann man bei den Gleichheitsregeln die Eta-Regel durch die folgende Regel ersetzen? (y ist eine Variable.) Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\frac{}{\lambda x.\, yx = y}$$

d) Welche Stufe haben die folgenden Typen:

(i) $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$

(ii) $(((\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N}) \to \mathbb{B}$

e) Was ist ein Beta-Redex?

f) Was ist ein kombinatorischer Term?

g) Was ist ein geschlossener Term?

h) Was ist ein λ-normaler Term?

i) Gibt es zu jedem Term M einen λ-normalen Term M' sodass $M \equiv M'$?

j) Seien x und f Variablen. Beschreiben Sie den Präterm $\lambda x.\, fxx$ mit einer Abstraktion $\lambda t.\, M$. Nehmen Sie dabei an, dass x den Typ X hat.

k) Was ist eine Typumgebung?

l) Was ist ein Γ-Zustand?

m) Was ist eine Gleichung?

n) Wann ist eine Gleichung universell gültig?

o) Definieren Sie mit Hilfe von Ty, Γ_0 und $Sta(\mathcal{D}, \Gamma_0)$: $\quad M \equiv N \overset{\text{def}}{\iff} \ldots$

p) Seien x, y, f und g Variablen und sei $(\lambda x.\, fx(\lambda y.\, gy))(fgg)$ ein Term. Sei außerdem $t \to t$ der Typ von g. Geben Sie die Typen von x, y und f an.

q) Gilt für alle Terme M, N: $M/M \approx N/N$?

r) Folgt $M'/N' \approx M/N$ aus $M/N \approx M'/N'$?

Aufgabe 3.4 (Primzahlen) Sie sollen die Aussage «Es gibt unendlich viele Primzahlen» mit ETT beschreiben und dabei nur Variablen des Typs $\mathbb{N}$ quantifizieren. Verwenden Sie dabei nur die folgenden Konstanten:

$$\begin{aligned}
\exists, \forall &: (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B} \\
\wedge, \vee, \Rightarrow &: \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B} \\
\neg &: \mathbb{B} \to \mathbb{B} \\
=, \leq &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B} \\
0, 2 &: \mathbb{N} \\
\cdot &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}
\end{aligned}$$

a) Geben Sie ein Prädikat *teilt* $\in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein erstes Argument ein Teiler seines zweiten Arguments ist.

b) Geben Sie ein Prädikat *prim* $\in \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein Argument eine Primzahl ist.

c) Geben Sie ein Prädikat *unendlich* $\in (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein Argument eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ darstellt.

d) Stellen Sie die Aussage «Es gibt unendlich viele Primzahlen» mit den obigen Prädikaten dar.