5. Übungsblatt zu Computationale Logik, SS 2004

Prof. Dr. Gert Smolka, Marco Kuhlmann (MSc)
http://www.ps.uni-sb.de/courses/cl-ss04/

Lesen Sie im Skript: Abschnitt 7.9 von ETT, Abschnitte 4–8 von Aussagenlogik

---

Wie auf dem letzten Übungsblatt betrachten wir Boolesche Algebren im Rahmen von ETT. Wir arbeiten mit der Signatur

$$0, 1 : B;\ \ \neg : B \to B;\ \ \wedge, \vee : B \to B \to B$$

und einer Typumgebung Γ_0, die für jeden Typ unendlich viele Variablen bereit stellt. Mit *BAx* bezeichnen wir die Menge der Booleschen Axiome (Kommutativität, Identität, Komplemente, Distributivität) und mit *BG* die auf dem 4. Übungsblatt angegebene Gleichungsmenge. Es gilt $DC(BAx) = DC(BG)$. Die Menge *Ter* der Terme ist gemäß der angegebenen Signatur und Γ_0 gebildet. Die Menge $For \subseteq Ter$ ist wie folgt definiert:

- $x \in For$ falls $\Gamma_0 x = B$.
- $0 \in For$ und $1 \in For$.
- Wenn $M \in For$, dann $\neg M \in For$.
- Wenn $M, N \in For$, dann $M \wedge N \in For$ und $M \vee N \in For$.

Das Symbol $\mathcal{T}$ bezeichnet die zweiwertige Boolesche Algebra.

Aufgabe 5.1 (Boolesche Algebren)

a) Geben Sie eine Boolesche Algebra mit 1024 Elementen an.

b) Warum gibt es keine Boolesche Algebra mit 3 Elementen?

c) Geben Sie eine Boolesche Algebra $\mathcal{B}$ und einen Zustand σ an, sodass für die Variablen $x : B$ und $y : B$ gilt:

   (i) $\mathcal{B}(x \wedge y)\sigma = \mathcal{B}(0)$

   (ii) $\sigma x \neq \mathcal{B}(0)$ und $\sigma y \neq \mathcal{B}(0)$

d) Seien $x : B$ und $f : B \to B$ Variablen. Geben Sie eine Boolesche Algebra $\mathcal{B}$ an, in der die Gleichung $fx = x(f1) + \overline{x}(f0)$ nicht gültig ist.

Aufgabe 5.2 (Erfüllbarkeit in $\mathcal{T}$) Eine Formelmenge $M \subseteq For$ heißt *erfüllbar* genau dann, wenn ein Zustand σ existiert mit $\forall\ A \in M\colon \mathcal{T}M\sigma = 1$. Geben Sie eine 3-elementige Formelmenge an, die nicht erfüllbar ist und deren echte Teilmengen alle erfüllbar sind.

Aufgabe 5.3 (Konditionale) Sei die Notation $(M, N_0, N_1) \overset{\text{def}}{=} \overline{M}N_0 + MN_1$ gegeben. Leiten Sie die folgenden Gleichungen aus der Gleichungsmenge *BG* ab.

a) $(x, y, y) = y$

b) $\overline{(x, y, z)} = (x, \overline{y}, \overline{z})$

c) $(\overline{x}, y, z) = (x, z, y)$

d) $(x, y, z)u = (x, yu, zu)$

e) $(x, y, z)(x, u, v) = (x, yu, zv)$

f) $(x, y, z) = (\overline{x} + z)(x + y)$

Aufgabe 5.4 (Deduktiver Abschluss)

a) Wie kann man $DC(BAx) = DC(BG)$ beweisen?

b) Folgt aus $DC(BAx) = DC(BG)$, dass $SC(BAx) = SC(BG)$? Warum?

Aufgabe 5.5 (Normalisierung) Sei $\Leftrightarrow \overset{\text{def}}{=} \lambda xy.\, xy + \overline{x}\,\overline{y}$. Beweisen Sie:

a) $DC(BAx \cup \{M = 1, N = 1\}) = DC(BAx \cup \{M \wedge N = 1\})$

b) $DC(BAx \cup \{M = N\}) = DC(BAx \cup \{M \Leftrightarrow N = 1\})$

Aufgabe 5.6 (Übersetzung) Sei die Notation $\overline{\wedge} \overset{\text{def}}{=} \lambda xy.\, \overline{xy}$ gegeben und sei $For' \subseteq Ter$ die wie folgt definierte Menge:

- $x \in For'$ falls $\Gamma_0 x = B$.
- $M \mathbin{\overline{\wedge}} N \in For'$ falls $M, N \in For'$.

Definieren Sie mit Hilfe struktureller Rekursion eine Funktion $T \in For \to For'$, für die gilt: $\forall\ M \in For\colon BAx \vdash M = T(M)$.

Aufgabe 5.7 (Übersetzung) Seien die Notationen

$$\overline{\wedge} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda xy.\overline{xy} \quad \text{und} \quad neg \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x.x \,\overline{\wedge}\, x$$

gegeben. Weiter sei $Ter' \subseteq Ter$ die wie folgt definierte Menge:

- $x \in Ter'$ falls $x \in Ter$.
- $\overline{\wedge} \in Ter'$
- $\lambda x.M \in Ter'$ falls $M \in Ter'$ und $\lambda x.M \in Ter$.
- $MN \in Ter'$ falls $M, N \in Ter'$ und $MN \in Ter$.

Definieren Sie eine Funktion $T \in Ter \to Ter'$ für die gilt: $\forall M \in Ter\colon BAx \vdash M = T(M)$. Definieren Sie T durch strukturelle Rekursion über Termen.

Aufgabe 5.8 (Abschlussoperatoren) Geben Sie eine Menge X und einen Abschlussoperator f für X an, der nicht kompakt ist – für den also eine unendliche Menge $A \subseteq X$ und $x \in fA$ existieren, sodass $x \notin fB$ für alle endlichen Teilmengen $B \subseteq A$.

Aufgabe 5.9 (Abschlussoperatoren) Beweisen Sie Proposition 1.7.3 im Kapitel Typtheorie.