7. Übungsblatt zu Computationale Logik, SS 2004

Prof. Dr. Gert Smolka, Marco Kuhlmann (MSc)
http://www.ps.uni-sb.de/courses/cl-ss04/

Lesen Sie im Skript: das Kapitel über Aussagenlogik

Aufgabe 7.1 Sei $x < y < z$ und sei A die Formel

$$(z \Rightarrow (x + y))(x + y + z)(y \Rightarrow x)(x \Rightarrow 0)$$

a) Geben Sie den Primbaum für A an.

b) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.

c) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.

d) Geben Sie die konjunktive Primform für $\widehat{A}$ an.

e) Geben Sie die disjunktive Primform für $\widehat{A}$ an.

f) Geben Sie die signifikaten Variablen von A und $\widehat{A}$ an.

Aufgabe 7.2 Sei PT die Menge aller Primbäume und PF die Menge aller Primformen.

a) Wieviele Funktionen $f \in PT \to PF$ mit $\forall A \in PT\colon A \equiv \mathcal{K}(fA)$ gibt es?

b) Wieviele Funktionen $f \in PT \to PF$ mit $\forall A \in PT\colon A \equiv \mathcal{D}(fA)$ gibt es?

c) Ist jede dieser Funktionen injektiv?

d) Ist jede dieser Funktionen surjektiv?

e) Wieviele Funktionen $f \in PF \to PT$ mit $\forall S \in PF\colon \widehat{fS} \equiv \mathcal{D}S$ gibt es?

Aufgabe 7.3 Sei $x < y < z$ und sei A eine Formel mit

$$\forall \sigma \in Var \to \mathbb{B}\colon\ \mathcal{T}(A)\sigma = 1 \iff \sigma X + \sigma Y + \sigma Z \geq 1$$

a) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.

b) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.

c) Geben Sie den Primbaum für A an.

d) Geben Sie die konjunktive Primform für $\widehat{A}$ an.

Aufgabe 7.4 Geben Sie eine Formel A an, sodass die konjunktive Primform von A gleich der disjunktiven Primform von A ist.

Aufgabe 7.5 Sei V eine unendliche Menge von Variablen und $\Gamma_0 = \lambda x \in V . B$. Geben Sie eine Boolesche Funktion $f \in (V \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ an, die durch keine Formel beschrieben werden kann.

Aufgabe 7.6 Sei A die Boolesche Formel $\overline{(x + z) \Rightarrow x\overline{y}z} \;\Rightarrow\; xyz$ und seien x, y, z drei verschiedene Variablen.

a) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.

b) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.

c) Geben Sie die konjunktive Primform für $\widehat{A}$ an.

d) Geben Sie die konjunktive Primform für $\neg A$ an.

e) Geben Sie die disjunktive Primform für $x \vee A$ an.

f) Geben Sie die signifikanten Variablen für $z + A$ an.

g) Geben Sie die signifikanten Variablen für $y + A$ an.

Aufgabe 7.7 Geben Sie zwei Klauselformen S und S' an mit $\mathcal{K}(S) = \mathcal{K}(S')$ und $\mathcal{D}S \neq \mathcal{D}S'$.

Aufgabe 7.8

a) Wieviele konjunktive Primformen gibt es, in denen höchstens die Variablen x, y, z vorkommen?

b) Wieviele Primformen S mit $\mathcal{K}(S) = \mathcal{D}S$ gibt es, in denen höchstens die Variablen x, y, z vorkommen?

c) Sei V eine Menge von n verschiedenen Variablen. Wieviele disjunktive Primformen gibt es, in denen höchstens die Variablen aus V vorkommen?

Aufgabe 7.9 Sie wurden von einem Logiker gekapert und sitzen in einem Verlies mit zwei Türen, von denen eine in die Freiheit und die andere in die Vorlesung «Logik ohne Gnade» führt. Der Logiker gibt Ihnen eine faire Chance, seiner Vorlesung zu entkommen und gewährt Ihnen eine Frage, die er mit 0 oder 1 beantworten wird. Die Frage muss als Boolesche Formel formuliert sein, in der die Variablen x und y vorkommen können, denen der Logiker die folgenden Werte gibt:

i) $x = 1$ genau dann, wenn die linke Tür in die Freiheit führt.

ii) $y = 1$ genau dann, wenn der Logiker die Frage korrekt beantwortet.

Welche Formel müssen Sie den Logiker fragen, damit Sie wissen welche Tür in die Freiheit führt? Können Sie erklären, warum diese Frage funktioniert?

Aufgabe 7.10 Sie machen die mündliche Nachprüfung zur Vorlesung «Logik ohne Gnade» bei Professor x und seinem Assistenten y:

i) x sagt: Ich sage die Wahrheit und y sagt die Wahrheit.

ii) y sagt: x lügt.

Sie bestehen, wenn Sie ohne weitere Information herausfinden, ob x und y die Wahrheit sagen oder lügen und auch begründen können, warum dies so ist.