12. Übungsblatt zu Computationale Logik, SS 2004

Prof. Dr. Gert Smolka, Marco Kuhlmann (MSc)
http://www.ps.uni-sb.de/courses/cl-ss04/

Lesen Sie im Skript: das Kapitel über Quantoren

Aufgabe 12.1 Leiten Sie die folgenden Gleichungen mit Hilfe der Gleichheitsregeln aus den logischen Axiomen in *LAx* ab. Es genügt, wenn Sie die Anwendung der Quantorenaxiome vermerken.

a) $\neg\exists f \;=\; \forall x.\neg f x$

b) $\exists f \;=\; \exists f \vee f x$

c) $\exists x.u \;=\; u$

d) $\exists x.f x \wedge u \;=\; \exists f \wedge u$

e) $u \to \forall f \;=\; \forall x.u \to f x$

f) $u \wedge \exists f \to v \;=\; \forall x.u \wedge f x \to v$

g) $(u \to f x) \to (u \to \exists f) \;=\; 1$

h) $(u \wedge f x \to v) \to (u \wedge \forall f \to v) \;=\; 1$

Aufgabe 12.2 Geben Sie jeweils Funktionen $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ an, für die gilt:

a) $\forall x \in \mathbb{N}. f x \vee g x \;\neq\; \forall f \vee \forall g$

b) $\exists x \in \mathbb{N}. f x \wedge g x \;\neq\; \exists f \wedge \exists g$

Aufgabe 12.3 Bestimmen Sie für die folgenden Formeln jeweils Pränex- und Skolemnormalformen. Zeigen Sie jeweils mit den Gleichheitsregeln, dass es sich um beweisbar äquivalente Formeln handelt.

a) $\forall f \wedge \exists g$

b) $\exists f \to \exists f$

c) $\forall x\,.f x \to \exists f \wedge g x$

d) $u \leftrightarrow \forall x. f x \to \exists f \wedge g x$

e) $\forall x \forall y. \exists (f x y)$

f) $\forall x. \forall (f x) \to \forall (g x)$

Hinweis: In (e) und (f) haben die Variablen f, g andere Typen als vorher.

Aufgabe 12.4 Leiten Sie die folgenden Formeln mit Hilfe der natürlichen Regeln $\forall L$, $\forall R$, $\exists L$, $\exists R$, *Bool*, *Lam* und *Done* ab. Vermerken Sie, welche natürlichen Regel Sie jeweils anwenden.

a) $\neg\exists x \forall y.\, hxy \leftrightarrow \neg hyy \quad (h : X \to X \to X)$

b) $(\exists x \forall y.\, gxy) \to \forall y \exists x.\, gxy$

c) $(\forall x.\, fx \wedge gx) \to \forall f$

d) $\forall f \wedge \forall g \to \forall x.\, fx \wedge gx$

e) $(\exists x.\, fx \vee gx) \to \exists f \vee \exists g$

f) $\forall x \forall y.\, hxy \to \forall y \forall x.\, hxy$