2. Klausur Introduction to Computational Logic (SS 2004)

Prof. Dr. Gert Smolka   Marco Kuhlmann, MSc

24. Juli 2004

Name   Sitzplatz

Matrikelnummer   Code

Bitte öffnen Sie das Klausurheft erst dann, wenn Sie dazu aufgefordert werden.

Sie können die Klausur nur auf dem für Sie vorgesehen Platz schreiben. Sie müssen das mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehene Heft verwenden.

Hilfsmittel sind nicht zugelassen. Am Arbeitsplatz dürfen nur Schreibgeräte, Getränke, Speisen und Ausweise mitgeführt werden. Taschen und Jacken müssen an den Wänden des Klausursaals zurückgelassen werden.

Das Verlassen des Saals ohne Abgabe des Klausurhefts gilt als Täuschungsversuch.

Wenn Sie während der Bearbeitung zur Toilette müssen, geben Sie bitte Ihr Klausurheft bei der Aufsicht ab. Es kann immer nur eine Person zur Toilette.

Alle Lösungen müssen auf den bedruckten rechten Seiten des Klausurhefts notiert werden. Die leeren linken Seiten dienen als Platz für Skizzen und werden **nicht korrigiert.** Notizpapier ist nicht zugelassen. Sie können mit Bleistift schreiben.

Für die Bearbeitung der Klausur stehen 150 Minuten zur Verfügung. Insgesamt können 150 Punkte erreicht werden. Die für jede Aufgabe angebene Punktzahl gibt Ihnen also einen Anhaltspunkt, wieviel Zeit Sie auf die Bearbeitung der Aufgabe verwenden sollten. Zum Bestehen der Klausur genügen 75 Punkte.

Bitte legen Sie zur Identifikation Ihren Personalausweis bzw. Reisepass sowie Ihren Studierendenausweis neben sich.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe	**Note**
16	10	10	12	15	12	12	12	12	17	12	10	150	

Aufgabe 1. Primformen $(4 \cdot 4 = 16)$

Sei A die Formel $(x \vee y) \to \neg(z \to y)$.

a) Bestimmen Sie die konjunktive Primform für A.

b) Bestimmen Sie die disjunktive Primform für A.

c) Bestimmen Sie die konjunktive Primform für $A \wedge x$.

d) Bestimmen Sie die disjunktive Primform für $A \vee x$.

Aufgabe 2. Boolesche Funktionen (5 + 5 = 10)

Sei V eine Menge von Variablen.

a) Habe V genau n Elemente. Wieviele disjunktive Primformen gibt es, in denen höchstens die Variablen aus V vorkommen?

b) Sei V unendlich. Geben Sie eine Funktion $(V \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ an, die durch keine Formel beschrieben werden kann.

Aufgabe 3. Wüste der Logiker (10)

Sie haben sich in der Wüste der Logiker verlaufen, die Sonne brennt vom Himmel, Sie sind am Ende, wenn Sie nicht bald Wasser finden. Sie kommen an eine Weggabelung, von der Sie wissen, dass es entweder links oder rechts zu einem Brunnen geht. Glücklicherweise steht an der Gabelung ein Gödelautomat, der Boolesche Formeln auswertet. Unter anderem kennt er die Variablen x, y:

- $x = 1$ genau dann, wenn der Automat das korrekte Ergebnis liefert.
- $y = 1$ genau dann, wenn es links zur Quelle geht.

Welche Formel müssen Sie den Automaten auswerten lassen, damit Sie genau dann das Ergebnis 1 bekommen, wenn es rechts zur Quelle geht?

Aufgabe 4. Natürliches Schließen (12)

Leiten Sie die Formel

$$(\exists x.\, u \vee \neg f(gx)) \to u \vee \neg \forall f$$

mithilfe der natürlichen Schlussregeln $\forall L$, $\forall R$, $\exists L$, $\exists R$, *Bool*, *Lam* und *Done* ab. Vermerken Sie, welche Regeln Sie jeweils anwenden.

Hinweis: Es handelt sich um die Formel $(\exists x.(u \vee \neg f(gx))) \to (u \vee \neg \forall f)$ und u und x sind verschiedene Variablen.

$(\forall \mathrm{I})$	$\forall f = \forall f \wedge fx$	$(\exists \mathrm{I})$	$\exists f = \exists f \vee fx$
$(\forall \mathrm{E})$	$\forall x\,.\,u = u$	$(\exists \mathrm{E})$	$\exists x\,.\,u = u$
$(\forall \neg)$	$\neg \forall f = \exists x\,.\,\neg fx$	$(\exists \neg)$	$\neg \exists f = \forall x\,.\,\neg fx$
$(\forall \vee)$	$\forall x\,.\,fx \vee u = \forall f \vee u$	$(\exists \wedge)$	$\exists x\,.\,fx \wedge u = \exists f \wedge u$
$(\forall \wedge)$	$\forall x\,.\,fx \wedge u = \forall f \wedge u$	$(\exists \vee)$	$\exists x\,.\,fx \vee u = \exists f \vee u$
$(\forall \wedge')$	$\forall x\,.\,fx \wedge gx = \forall f \wedge \forall g$	$(\exists \vee')$	$\exists x\,.\,fx \vee gx = \exists f \vee \exists g$
$(\forall \forall)$	$\forall x \forall y\,.\,hxy = \forall y \forall x\,.\,hxy$	$(\exists \exists)$	$\exists x \exists y\,.\,hxy = \exists y \exists x\,.\,hxy$
$(\forall \exists)$	$\forall x \exists y.hxy = \exists f' \forall x.hx(f'x)$	$(\exists \forall)$	$\exists x \forall y.hxy = \forall f' \exists x.hx(f'x)$

Aufgabe 5. Skolemnormalformen (15)

Zeigen Sie mithilfe der Gleichheitsregeln, der Booleschen Axiome und der links angegebenen Quantoraxiome, dass die Formel

$$\forall f \wedge \forall x.(\exists x.\forall f) \to gx$$

beweisbar-äquivalent zu einer Formel in Skolemnormalform ist. Wenden Sie dabei die Gleichheitsregeln und die Booleschen Axiome stillschweigend an, aber vermerken Sie jede Anwendung eines Quantoraxioms.

Hinweis zur Klammerung:
Es handelt sich um die Formel $\forall f \wedge \forall x.((\exists x.\forall f) \to gx)$.

Aufgabe 6. Abzählbarkeit (12)

Beweisen Sie: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist nicht abzählbar.

Aufgabe 7. Darstellung (4 + 8 = 12)

Sie sollen die durch die Deklaration

```
datatype tree = A | B of tree * tree
```

gegebenen Bäume durch natürliche Zahlen darstellen. Schreiben Sie dazu zwei Prozeduren $code : tree \to int$ und $decode : int \to tree$, sodass $decode(code\ t) = t$ für alle Bäume t gilt. Wir spendieren Ihnen zwei vordefinierte Prozeduren:

a) $power : int \to int \to int$ liefert zu x und $n \geq 0$ die Potenz x^n.

b) $ndiv : int \to int \to int$ ermittelt zu $x > 0$ und $p > 0$, wie oft sich x ganzzahlig durch p teilen lässt.

Aufgabe 8. Reduktionen (12)

Seien P und Q Probleme, sodass eine Reduktion $P \rightarrow Q$ existiert. Geben Sie für jede der folgende Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist. Richtige Antworten ergeben 3 Punkte, falsche Antworten -3 Punkte.

a) P prüfbar $\implies$ Q prüfbar

b) Q entscheidbar $\implies$ P entscheidbar

c) P nicht prüfbar $\implies$ Q nicht prüfbar

d) Q nicht entscheidbar $\implies$ P nicht entscheidbar

Aufgabe 9. Terminierung $(4 + 8 = 12)$

Sei $T = \{ c \in Com \mid \mathcal{F}(c) \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \}$
die Menge der immer terminierenden Kommandos.

a) Geben Sie eine Reduktion $\{ c \in Com \mid \mathcal{F}(c)(\#c) = \bot \} \to Com - T$ an.

b) Geben Sie eine Reduktion $\{ c \in Com \mid \mathcal{F}(c)(\#c) = \bot \} \to T$ an.

Aufgabe 10. Programmkonstruktion (5 + 12 = 17)

Sei die Spezifikation (A, B) mit

$$A = \{X \geq 0 \wedge Y > 0\}$$
$$B = \{K \cdot Y \leq X \ \wedge \ X < (K+1) \cdot Y \ \wedge \ Z = K \cdot Y\}$$

gegeben. (X, Y, K und Z sind Lokationen.)

a) Entwickeln Sie ein Kommando, das die Spezifikation (A, B) erfüllt und die Lokationen X und Y nicht zuweist.

b) Geben Sie eine Invariante für die Schleife Ihres Kommandos an, so dass alle Verifikationsbedingungen erfüllt sind.

Aufgabe 11. Reguläre Programme $(4 \cdot 3 = 12)$

Sie sollen für die unten angegebenen Relationen entscheiden, welcher der folgenden Fälle jeweils vorliegt:

i) *Durch ein Kommando beschreibbar.* Geben Sie in diesem Fall ein beschreibendes Kommando an.

ii) *Durch ein reguläres Programm aber nicht durch ein Kommando beschreibbar.* Geben Sie in diesem Fall ein beschreibendes reguläres Programm an.

iii) *Nicht durch ein reguläres Programm beschreibbar.*

Nehmen Sie an, dass es unendlich viele Lokationen gibt, und dass es sich bei X und Y um zwei einmal festgelegte Lokationen handelt. Verwenden Sie nur die für Kommandos und reguläre Programme definierten Konstrukte und verzichten Sie auf Abkürzungen.

a) $\{ (\sigma, \sigma') \in \Sigma^2 \mid \sigma = \sigma' \wedge \sigma X \leq \sigma Y \}$

b) $\{ (\sigma, \sigma') \in \Sigma^2 \mid \sigma' X \geq 0 \}$

c) $\{ (\sigma, \sigma') \in \Sigma^2 \mid \sigma' = \sigma[X := \sigma X + \sigma Y] \}$

d) $\{ (\sigma, \sigma') \in \Sigma^2 \mid \exists y \in \mathbb{Z}\colon\ \sigma' = \sigma[X := y] \}$

Aufgabe 12. Schwächste Vorbedingungen $(1 + 3 \cdot 3 = 10)$

Geben Sie die folgenden Mengen an, ohne dabei $\mathcal{N}$ oder Programme zu verwenden.

a) $\mathcal{N}\,(X \leq 7?)\,\Sigma =$

b) $\mathcal{N}\,(\mathsf{while}\ X \leq 0\ \mathsf{do}\ X := X + 1)\,\emptyset =$

c) $\mathcal{N}\,((X := X + 5)^*)\,\{X \geq 3\} =$

d) $\mathcal{N}\,(\text{if } X \leq 0 \text{ then } X := 5 \text{ else } X := 7)\,\{X \geq 7\} =$