3. Übungsblatt zu Logik, Semantik und Verifikation SS 2001

Prof. Dr. Gert Smolka, Dr. Christian Schulte
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv01/

Abgabe: 30. April in der Vorlesungspause

Aufgabe 3.1: Binäre Boolesche Funktionen (6) Diese Aufgabe hilft Ihnen, sich einen Überblick über die Funktionen in $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ zu verschaffen.

(a) Realisieren Sie eine Bijektion $(\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}^4$ mit zwei Prozeduren

```
to   : (bool * bool -> bool) -> bool * bool * bool * bool
from : bool * bool * bool * bool -> (bool * bool -> bool)
```

(b) Wieviele Funktionen $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ gibt es?

(c) Stellen Sie jede Funktion $f \in \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ durch einen möglichst einfachen Booleschen Ausdruck a wie folgt dar:

   (i) $f = \lambda\,(x, y) \in \mathbb{B}^2 \,.\, a$.

   (ii) a ist mit x, y, 0, 1, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ gebildet.

Aufgabe 3.2: Normalformen (4) Seien $X, Y \in \mathit{Var}$ zwei verschiedene Variablen.

(a) Geben Sie eine disjunktive Normalform für $X \Leftrightarrow Y$ an.

(b) Geben Sie eine konjunktive Normalform für $X \Leftrightarrow Y$ an.

(c) Wieviele disjunktive Normalformen für $X \Leftrightarrow Y$ gibt es? Nehmen Sie dazu an, dass die Menge *Var* unendlich ist.

Aufgabe 3.3: Disjunktive Vereinfachung (10) Seien $X, Y, Z \in \mathit{Var}$ drei verschiedene Variablen. Beantworten Sie für jede der Formeln

$$\begin{aligned}
A_1 &= \neg X \wedge (X \vee \neg Y) \wedge Y \\
A_2 &= (X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y) \\
A_3 &= ((X \vee Y) \vee \neg Z) \wedge (X \vee (Y \vee Z)) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge \neg X
\end{aligned}$$

die folgenden Fragen:

(a) Geben Sie ein Tableau an, dass eine maximale disjunktive Vereinfachungskette für die Formel darstellt: $\{\{A_i\}\} \xrightarrow{\text{d}} \cdots \xrightarrow{\text{d}} S$ mit S normal.

(b) Geben Sie die durch das Tableau dargestellte disjunktive Normalform an.

(c) Geben Sie eine die Formel erfüllende Belegung an, falls die Formel erfüllbar ist.

Aufgabe 3.4: Konjunktive Vereinfachung (6) Seien X und Y verschiedene Variablen und sei A die Formel $\neg(\neg X \wedge Y \wedge \neg(\neg X \wedge Y))$.

(a) Geben Sie eine maximale konjunktive Vereinfachungskette für A an: $\{\{A\}\} \overset{k}{\to} \cdots \overset{k}{\to} S$ mit S normal.

(b) Geben Sie die durch Ihre Vereinfachungskette berechnete konjunktive Normalform für A an.

(c) Stellen Sie Ihre Vereinfachungskette durch ein Tableau dar.

Aufgabe 3.5: Syntax mit Implikation und Negation (8) Nehmen Sie an, dass die Formeln von AL alternativ wie folgt definiert sind:

$$A, B \in For \;=\; X \;\mid\; \neg A \;\mid\; A \Rightarrow B$$

(a) Geben Sie passende Definitionen für $\mathcal{F}$ und $\mathcal{M}$ an.

(b) Geben Sie passende Definitionen für die Abkürzungen 0, 1, $A \wedge B$, $A \vee B$ an.

(c) Geben Sie passende disjunktive Vereinfachungsregeln an.

(d) Geben Sie passende konjunktive Vereinfachungsregeln an.

Aufgabe 3.6: Syntax mit Implikation und Null (8) Nehmen Sie an, dass die Formeln von AL alternativ wie folgt definiert sind:

$$A, B \in For \;=\; X \;\mid\; 0 \;\mid\; A \Rightarrow B$$

(a) Geben Sie passende Definitionen für $\mathcal{F}$ und $\mathcal{M}$ an.

(b) Geben Sie passende Definitionen für die Abkürzungen 1, $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$ an.

(c) Geben Sie passende Vereinfachungsregeln für Sequenten an.

(d) Geben Sie passende Beweisregeln für Sequenten an.

Aufgabe 3.7: Hintikka-Mengen (8) Sei $M \subseteq For$ eine Formelmenge mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Wenn $\neg A \in M$, dann $A \notin M$.

(b) Wenn $\neg\neg A \in M$, dann $A \in M$.

(c) Wenn $A_1 \wedge A_2 \in M$, dann $A_1 \in M$ und $A_2 \in M$.

(d) Wenn $\neg(A_1 \wedge A_2) \in M$, dann $\neg A_1 \in M$ oder $\neg A_2 \in M$.

Zeigen Sie, dass es eine Belegung σ gibt mit

$$\forall A \in M\colon\; \mathcal{F}[\![A]\!]\sigma = 1$$