4. Übungsblatt zu Logik, Semantik und Verifikation SS 2001

Prof. Dr. Gert Smolka, Dr. Christian Schulte
`www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv01/`

Abgabe: 7. Mai in der Vorlesungspause

Aufgabe 4.1: Primdarstellungen (4) Seien $X, Y, Z \in \mathit{Var}$ paarweise verschiedene Variablen.

(a) Geben Sie eine Formel A an mit

$$\mathcal{M}[\![A]\!] = \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma(X) + \sigma(Y) + \sigma(Z) \geq 1\}$$

(b) Geben Sie die konjunktive Primdarstellung für A an.

(c) Geben Sie die disjunktive Primdarstellung für A an.

Aufgabe 4.2: Primdarstellungen (4) Seien X, Y zwei verschiedene Variablen. Geben Sie die konjunktive und disjunktive Primdarstellung von $X \Leftrightarrow Y$ an.

Aufgabe 4.3: Primdarstellungen (6)

(a) Geben Sie die konjunktive und disjunktive Primdarstellung von 0 an.

(b) Geben Sie eine Formel an, deren konjunktive Primdarstellung mit ihrer disjunktiven Primdarstellung identisch ist.

(c) Geben Sie eine normale Klauselmenge S und eine Primdarstellung S' an wie folgt:

(i) $\mathcal{D}[\![S]\!] = \mathcal{D}[\![S']\!]$ und $\mathcal{K}[\![S]\!] = \mathcal{K}[\![S']\!]$.

(ii) S enthält nur Klauseln mit mindestens drei Literalen.

(iii) S' enthält genau eine Klausel mit genau einem Literal.

(d) Sei $A \in \mathit{For}$ und $X \in \mathit{Var}$. Geben Sie eine möglichst einfach testbare Bedingung für die konjunktive Primdarstellung von A an, die genau dann gilt, wenn $(A \Rightarrow X) \models\!\!\!\!\dashv 1$.

Aufgabe 4.4: Vollständiges Tableau mit Subsumption (6) Sei die folgende Formel gegeben:

$$(X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$$

(a) Geben Sie ein vollständiges disjunktives Tableau mit Subsumption für die Formel an.

(b) Geben Sie die konjunktive und disjunktive Primdarstellung der Formel an.

Aufgabe 4.5: Vereinfachung und Primdarstellung (12) Seien $X, Y, Z \in \mathit{Var}$ paarweise verschiedene Variablen und sei A die Formel $(Z \Rightarrow Y) \Rightarrow X \wedge Y$.

(a) Beschreiben Sie die Formel A nur mit $\neg$ und $\wedge$. Vorsicht: Sie sollen die Formel A beschreiben, nicht die Denotation von A.

(b) Beschreiben Sie die zu A duale Formel $\widehat{A}$ nur mit $\neg$ und $\wedge$.

(c) Geben Sie ein Tableau für eine maximale disjunktive Vereinfachungskette für A an.

(d) Geben Sie die disjunktive Primdarstellung von A an.

(e) Geben Sie eine echte Teilmenge S der disjunktiven Primdarstellung von A an, für die gilt: $\mathcal{D}[\![S]\!] = \mathcal{M}[\![A]\!]$.

(f) Geben Sie ein Tableau für eine maximale konjunktive Vereinfachungskette für A an.

(g) Geben Sie die konjunktive Primdarstellung von A an.

Aufgabe 4.6: Modellierung und Primdarstellung (10) Vier Freunde vereinbaren Regeln für eine Party:

(1) Wer mit Rita tanzt, muss auch mit Karen und Maria tanzen.

(2) Wer nicht mit Rita tanzt, darf nicht mit Karen tanzen, muss aber mit Clara tanzen.

(3) Wer nicht mit Karen tanzt, darf nicht mit Clara tanzen.

Sie sollen diese Regeln in möglichst einfacher Form darstellen.

(a) Beschreiben Sie jede der drei Regeln durch eine aussagenlogische Formel. Verwenden Sie dabei nur die Variablen C (Clara), K (Karen), M (Maria) und R (Rita).

(b) Geben Sie eine konjunktive Primdarstellung für die Konjunktion der Regeln an.

(c) Geben Sie eine disjunktive Primdarstellung für die Konjunktion der Regeln an.

Aufgabe 4.7: Dualitätsbeweis (8) Sie sollen das Lemma für den Dualitätssatz beweisen. Seien dazu die folgenden Funktionen gegeben:

$$\begin{aligned}
\widehat{\ } &\in \mathit{For} \to \mathit{For} \\
\widehat{X} &= X \\
\widehat{\neg A} &= \neg \widehat{A} \\
\widehat{A \wedge B} &= \widehat{A} \vee \widehat{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\ } &\in \Sigma \to \Sigma \\
\widehat{\sigma}(X) &= 1 - \sigma(X)
\end{aligned}$$

Beweise Sie: $\forall A \in \mathit{For}\colon\ \mathcal{F}[\![\widehat{A}]\!]\widehat{\sigma} = 1 - \mathcal{F}[\![A]\!]\sigma$.