5. Übungsblatt zu Logik, Semantik und Verifikation SS 2001

Prof. Dr. Gert Smolka, Dr. Christian Schulte
`www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv01/`

Abgabe: 14. Mai in der Vorlesungspause

Aufgabe 5.1: Normal- und Primformen (2) Sei S eine Normalform und S' eine Primform mit $\mathcal{K}[\![S]\!] = \mathcal{K}[\![S']\!]$.

(a) Geben Sie S und S' an mit $S \subsetneq S'$.

(b) Geben Sie S und S' an mit $S' \subsetneq S$.

Aufgabe 5.2: Zum Warmwerden (4) Seien A und B Formeln. Beweisen Sie

$$A \Rightarrow B \models\!\!\!\dashv 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}[\![A]\!] \subseteq \mathcal{M}[\![B]\!]$$

Verwenden Sie dabei nur die **Definitionen** aus dem Skript und die Tatsache

$$\forall A \in \mathit{For}\ \forall \sigma \in \Sigma :\ \sigma \in \mathcal{M}[\![A]\!] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}[\![A]\!]\sigma = 1$$

Aufgabe 5.3: Subsumierte Klauseln (6) Beweisen Sie Proposition 4.6.6 im Skript. Sie dürfen dabei alle Aussagen des Skriptes bis zu dieser Proposition verwenden.

Aufgabe 5.4: Duale Formeln (2) Eine Proposition im Skript formuliert die Aussage $\forall A \in \mathit{For}\colon\ \widehat{\widehat{A}} \models\!\!\!\dashv A$. Geben Sie ein Gegenbeispiel für die stärkere Aussage $\forall A \in \mathit{For}\colon\ \widehat{\widehat{A}} = A$ an.

Aufgabe 5.5: Formeln für Denotationen (2) Geben Sie eine Formel A an, mit

$$\mathcal{M}[\![A]\!] = ((\Sigma - DV(X)) \cap DV(Y)) \cup (\Sigma - (DV(Z) \cap DV(X)))$$

Dabei sind $X, Y, Z \in \mathit{Var}$ und DV ist wie folgt definiert:

$$DV \in \mathit{Var} \to \mathcal{P}(\Sigma)$$
$$DV(X) \quad = \quad \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma(X) = 1\}$$

Aufgabe 5.6: Nichtdenotierbare Teilmengen von $\mathcal{P}(\Sigma)$ (2) Sei Var unendlich. Geben Sie eine Menge $M \subseteq \mathcal{P}(\Sigma)$ an, zu der keine Formel A existiert mit $M = \mathcal{M}[\![A]\!]$.

Aufgabe 5.7: Verständnis (6) Sei PF die Menge der Primformen und f sei die folgenden Funktion

$$f \in PF \to Den$$
$$f(S) \quad = \quad \mathcal{K}[\![S]\!]$$

(a) Ist f surjektiv? Warum?

(b) Ist f injektiv? Warum?

(c) Gibt es eine Funktion $g \in Den \to PF$ mit $\forall D \in Den : \ f(g(D)) = D$? Geben Sie die Funktion g an, falls sie existiert.

Aufgabe 5.8: Signifikante Variablen (6) Die Menge $SV(A)$ der signifikanten Variablen einer Formel $A \in For$ ist definiert als:

$$SV \in For \to \mathcal{P}(Var)$$
$$SV(A) \quad = \quad SV(\mathcal{M}[\![A]\!])$$

Seien A und B Formeln. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $A \mathrel{|\!\!\!=\!\!\!|} B$, dann $SV(A) = SV(B)$.

(b) $SV(A) = SV(\widehat{A})$.

(c) $SV(A) = \emptyset \iff A$ gültig oder A unerfüllbar.

(d) Wenn $V \subseteq Var$ endlich, dann $\{D \in Den \mid SV(D) \subseteq V\}$ endlich.

Aufgabe 5.9: Beweis von dualen Aussagen (4) Sei $D \in Den$ und C eine literale Klausel. Weiter sei $C' = \{\, L \in C \mid |L| \in SV(D)\,\}$. Beweisen Sie:

$$\mathcal{D}[\![\{C\}]\!] \subseteq D \ \Rightarrow \ \mathcal{D}[\![\{C'\}]\!] \subseteq D$$

Verwenden Sie den Beweis der dualen Aussage im Skript als Vorlage.

Aufgabe 5.10: Implikation von Primformen (8) Sei S eine Primform und S' eine Normalform.

(a) Geben Sie eine leicht testbare Bedingung $TEST$ an mit:

$$\mathcal{K}[\![S]\!] \subseteq \mathcal{K}[\![S']\!] \iff TEST$$

(b) Beweisen Sie, dass die Äquivalenz von (a) gilt.

(c) Gilt die Äquivalenz

$$\mathcal{D}[\![S']\!] \subseteq \mathcal{D}[\![S]\!] \iff TEST$$

für Ihre Bedingung aus (a)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.11: Kleinste Normalformen (8) Wir definieren die Größe $|S|$ einer Normalform S wie folgt:

(1) die Größe einer Klausel ist die Anzahl ihrer Elemente.

(2) die Größe einer Normalform ist die Summe der Größen ihrer Klauseln.

Eine Normalform S heißt minimal, genau dann wenn für alle Normalformen S' gilt:

$$S \models\!\!\!\!\dashv S' \quad \Longrightarrow \quad |S| \leq |S'|$$

Beweisen Sie: Wenn S eine minimale Normalform und S' eine Primform mit $S \models\!\!\!\!\dashv S'$ ist, dann $S \subseteq S'$.

Aufgabe 5.12: Marias Erfolg – kurzgefasst (Freiwillig, keine Punkte) Wir betrachten noch einmal die Gründe für Marias Erfolg nach Aufgabe 2.2 (Zweites Übungsblatt). Sei die Formel M die Konjunktion von Marias Regeln.

(a) Geben Sie eine konjunktive Normalform für M an.

(b) Geben Sie die konjunktive Primform für M an (mit Resolutionsgraph).

(c) Geben Sie an, welche der Variablen in M signifikant für $\mathcal{M}[\![M]\!]$ sind.

Aufgabe 5.13: Gültigkeitsbeweis mit Tableau (Freiwillig, keine Punkte) Seien A, B_1, B_2 beliebige Formeln. Beweisen Sie mit einem vollständigen Tableau, dass die Formel

$$B_1 \wedge B_2 \Rightarrow (A \wedge B_1) \vee (\neg A \wedge B_2)$$

gültig ist.