2. Übungsblatt zu Logik, Semantik und Verifikation SS 2002

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv02/

Abgabe: 22. April in der Vorlesungspause

Aufgabe 2.1: Modellierung (10) Maria ist eine sehr erfolgreiche Studentin. Nach dem Geheimnis ihres Erfolges befragt, sagt sie, dass sie ihren Erfolg den folgenden Regeln verdankt:

(a) Wenn ich am Samstag nicht arbeite, dann arbeite ich am Freitag.

(b) Wenn ich am Dienstag nicht, wohl aber am Freitag arbeite, dann arbeite ich am Donnerstag.

(c) Wenn es zutrifft, dass, wenn ich am Dienstag nicht arbeite, ich zwar am Montag nicht, jedoch am Donnerstag arbeite, dann arbeite ich am Samstag.

(d) Wenn ich am Dienstag arbeite, dann arbeite ich am Mittwoch nicht.

(e) Wenn ich am Montag arbeite, dann arbeite ich am Freitag nicht.

(f) Wenn ich am Samstag arbeite, dann arbeite ich am Donnerstag nicht, wohl aber am Freitag.

Wir modellieren einen Wochenablauf durch ein Tupel

$$(Mo, Di, Mi, Do, Fr, Sa, So) \in \mathbb{B}^7$$

dessen Komponenten den Tagen Montag bis Sonntag entsprechen. Eine Komponente ist 1 genau dann, wenn an diesem Tag gearbeitet wird.

(a) Wieviele Wochenabläufe gibt es?

(b) Beschreiben Sie jede von Marias Regeln durch einen Booleschen Ausdruck, der sich möglichst eng an die Formulierung der Regel anlehnt. Verwenden Sie dabei nur die Variablen *Mo*, *Di*, *Mi*, *Do*, *Fr*, *Sa*, *So*, die beschreiben, ob an dem entsprechenden Tag gearbeitet wird.

(c) Geben Sie einen Wochenablauf an, der Marias Regeln erfüllt.

Aufgabe 2.2: Challenge (ohne Punkte) Wir wollen noch mehr über das Geheimnis von Marias Erfolg wissen.

(a) Geben Sie einen möglichst einfachen Booleschen Ausdruck an, der genau die Wochenabläufe beschreibt, die Marias Regeln erfüllen.

(b) An welchen Tagen arbeitet Maria immer, an welchen Tagen arbeitet sie nie?

(c) Wieviele Wochenabläufe gibt es, die Marias Regeln erfüllen?

Aufgabe 2.3: Modellierung (8) Ein Graph heisst *bipartit* genau dann, wenn jeder Knoten entweder rot oder blau gefärbt werden kann, sodass jede Kante nur verschiedenfarbige Knoten verbindet.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V \subseteq Var$. Beschreiben Sie, wie man zu G eine Formel in *For* konstruieren kann, die genau dann erfüllbar ist, wenn G bipartit ist.

Aufgabe 2.4: Substitutionslemma für AL (8) Seien $A, B \in For$, $X \in Var$ und $\sigma \in \Sigma$. Beweisen Sie durch strukturelle Induktion über A:

$$\mathcal{F}[\![A[B/X]]\!]\sigma = \mathcal{F}[\![A]\!](\sigma[\mathcal{F}[\![B]\!]\sigma/X])$$

Aufgabe 2.5: Erfüllbarkeit (4) Eine Formelmenge $M \subseteq For$ heißt *erfüllbar* genau dann, wenn eine Belegung σ existiert, sodass für alle $A \in M$ gilt: $\mathcal{F}[\![A]\!]\sigma = 1$. Geben Sie eine Formelmenge M wie folgt an:

(a) M enthält genau drei Formeln.

(b) M ist unerfüllbar.

(c) Jede zweielementige Teilmenge von M ist erfüllbar.

Aufgabe 2.6: Signifikante Variablen (10) Eine Variable $X \in Var$ heißt signifikante Variable einer Menge $M \in \Sigma$ genau dann, wenn

$$\exists \sigma \in M \, \exists b \in \mathbb{B} : \sigma[b/X] \notin M.$$

(a) Beweisen Sie, dass für jede Formel $A \in For$ gilt:

$$SV(A) = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A \models\!\!\!\!\!\;\dashv 0 \text{ oder } A \models\!\!\!\!\!\;\dashv 1$$

(b) Geben Sie eine möglichst einfache Formel A an mit

$$\emptyset \neq SV(A) \subsetneq VV(A).$$

(c) Sei $Var = \mathbb{N}_0$. Geben Sie eine Menge $M \subseteq \Sigma$ an, die unendlich viele sigifikante Variablen hat.

Aufgabe 2.7: Expressivität (10) Nehmen Sie an, dass die Formeln von AL um die Operationen $\vee$ und $\Rightarrow$ erweitert sind:

$$A \in For \;=\; X \;\mid\; \neg A \;\mid\; A_1 \wedge A_2 \;\mid\; A_1 \vee A_2 \;\mid\; A_1 \Rightarrow A_2$$

(a) Geben Sie die zusätzlichen Regeln für die Definitionen der Denotationsfunktionen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{M}$ an. Denken Sie daran, dass diese Definitionen mittels struktureller Rekursion erfolgen.

(b) Sei $KDI \subseteq For$ die Menge aller Formeln, die ohne Negation gebildet sind. Beweisen Sie:

$$\forall A \in KDI : \; A \not\models\!\!\!\!\!\;\dashv 0$$

Dabei bedeutet $A \not\models\!\!\!\!\!\;\dashv 0$, dass die Formeln A und 0 nicht äquivalent sind.

(c) Geben Sie eine Formel in For an, zu der es keine äquivalente Formel in KDI gibt.