



Logik, Semantik und Verifikation SS 2002: Musterlösung zum 12. Übungsblatt

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz

Aufgabe 12.1: Prüfbarkeit (4) M ist nicht prüfbar. Beweis durch Widerspruch. Aus einem Prüfer für M können wir einen Prüfer für S_0 konstruieren, da

$$\begin{aligned} x \in S_0 &\Leftrightarrow x \in \#Com \wedge \mathcal{F}(\#^{-1}x)0 = \perp \\ &\Leftrightarrow x \in \#Com \wedge \#(X_0 := 0; \#^{-1}x) \in M \end{aligned}$$

Aufgabe 12.2: Prüfbarkeit (4) Analog zur vorangegangenen Aufgabe, da

$$x \in S_0 \Leftrightarrow x \in \#Com \wedge \#(X_0 := 0; \#^{-1}x) \in M$$

Aufgabe 12.3: Minimum (4)

$$\lambda f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}. \lambda x \in \mathbb{N}. f x \wedge \forall (\lambda n \in \mathbb{N}. f n \Rightarrow x \leq n)$$

Aufgabe 12.4: Beschreibung einer Aussage (1+1+3+3+1)

(a)

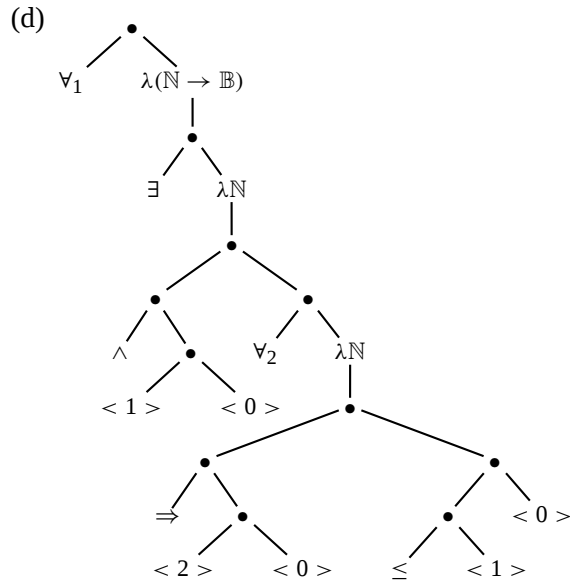
$$\begin{aligned} X &\in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B} \\ m &\in \mathbb{N} \\ x &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \forall_1 &\in ((\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B} \\ \exists &\in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B} \\ \forall_2 &\in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B} \end{aligned}$$

(c)

```
all1( fn X: Nat-> Bool =>
      some ( fn m:Nat =>
        and ( X m all2(fn x:Nat => impl(X x) (le m x)) )
      )
    )
```



(e) 0 (wähle $X = \lambda x \in \mathbb{N}.0$).

Aufgabe 12.5: Englisch nach ETT (3) Wir benutzen ab nun die folgende Abkürzung:

$\exists x \in M. A$ für $\exists(\lambda x \in M. A)$

- | | | | |
|-----|---|---------------------------------------|------------------------|
| (a) | $\forall p \in \text{person.}$ | $\exists p' \in \text{person.}$ | $\text{loves } p \ p'$ |
| (b) | $\exists p \in \text{person.}$ | $\exists p' \in \text{person.}$ | $\text{loves } p \ p'$ |
| (c) | $\forall p \in \text{person.}$ | $\forall p' \in \text{person.}$ | $\text{loves } p \ p'$ |
| (d) | $\neg(\text{exists } p \in \text{person.})$ | $\forall p' \in \text{person.}$ | $\text{loves } p \ p'$ |
| (e) | $\exists p \in \text{person.}$ | $\neg(\exists p' \in \text{person.})$ | $\text{loves } p \ p'$ |

Aufgabe 12.6: Englisch nach ETT (2)

- | | | | | |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| (a) | $\exists p \in \text{person.}$ | $\exists t \in \text{time.}$ | $\text{fool } p \ t$ | |
| (b) | $\forall p \in \text{person.}$ | $\exists t \in \text{time.}$ | $\text{fool } p \ t$ | |
| (c) | $\neg($ | $\forall p \in \text{person.}$ | $\forall t \in \text{time.}$ | $\text{fool } p \ t)$ |
| (d) | $\forall p \in \text{person.}$ | $\exists t \in \text{time.}$ | $\neg \text{fool } p \ t$ | |

Aufgabe 12.7: Primzahlen (2+2+4+2)

(a)

$\text{teilt} \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}$

$\text{teilt } n \ m = \exists n' \in \mathbb{N}. n \geq 1 \wedge m = n \cdot n'$

(b)

$$\begin{aligned} \text{prim} &\in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B} \\ \text{prim } m &= m \geq 2 \wedge \forall n \in \mathbb{N}. \text{teilt}(n, m) \Rightarrow (n = 1 \vee n = m) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{unendlich} &\in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B} \\ \text{unendlich } X &= \neg (\exists n \in \mathbb{N}. \forall x \in \mathbb{N}. Xx \Rightarrow x \leq n) \end{aligned}$$

(d)

$$\text{unendlich prim}$$

Aufgabe 12.8: Unendliche Teilmengen (2+3)

(a)

$$\begin{aligned} \text{injektiv} &\in (\mathbb{N} \rightarrow M) \rightarrow \mathbb{B} \\ \text{injektiv } f &= \forall n, m \in \mathbb{N}. fn = fm \Rightarrow n = m \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{unendlich} &\in (M \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B} \\ \text{unendlich } f &= \exists g \in \mathbb{N} \rightarrow M. \text{injektiv}(g) \wedge \forall n \in \mathbb{N}. f(gn) \end{aligned}$$

Aufgabe 12.9: Wohlfundierte Induktion (5+5)

(a)

$$\begin{aligned} \text{terminiert} &\in (X \rightarrow X \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B} \\ \text{terminiert } R &= \neg (\exists f : \mathbb{N} \rightarrow X. \forall n \in \mathbb{N}. R(fn)(f(n+1))) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{bedingung} &\in X \rightarrow \mathbb{B} \\ \text{bedingung } M &= \exists > \in X \rightarrow X \rightarrow \mathbb{B}. \text{terminiert } > \wedge \forall x \in X. (\forall y \in X. y < x \Rightarrow My) \Rightarrow Mx \end{aligned}$$