Logik, Semantik und Verifikation SS 2002: Musterlösung zum 13. Übungsblatt

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz

Aufgabe 13.1: Äquivalenz (4) $\mathcal{A}(+)xy = x$

Aufgabe 13.2: Stufe von Typen und Termen (2+2)

(a)

$$(((\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$$

Beachte, dass dieser Term ohne Klammerung nur Stufe 1 besitzt.

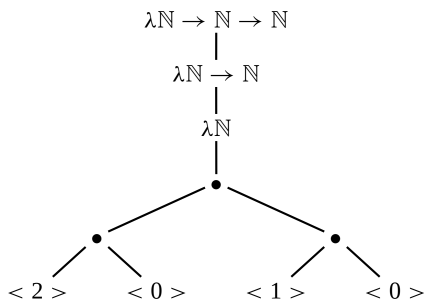
(b) $\lambda f.f$ mit $\tau f = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Aufgabe 13.3: Eigenschaften von Termen (1+1+1+1)

(a)

$$\begin{aligned} f = \quad & (0, \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}) \\ g = \quad & (0, \mathbb{N} \to \mathbb{N}) \\ x = \quad & (0, \mathbb{N}) \end{aligned}$$

(b)

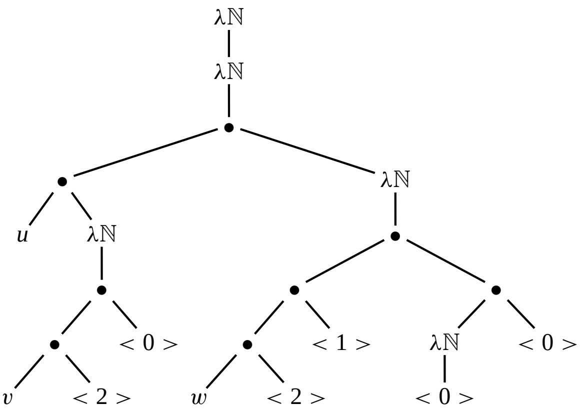


(c) $(\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Der Term besitzt Stufe 2.

(d) Der Term ist nicht offen, aber β- und η-normal.

Aufgabe 13.4: Normalformen (2+2+2)

(a)



(b)

$$\lambda yz.u(\lambda z.vyz)(\lambda x.wyz((\lambda y.y)x))$$

(c) Die λ-Normalform ist

$$\lambda yz.u(vy)(wyz)$$

Aufgabe 13.5: Substitution und Normalformen (2+2+2) Alle drei Terme besitzen die $\beta\eta$-Normalform:

$$\lambda x'y'.vxy((ux')(uy'))$$

Aufgabe 13.6: Äquivalenz (2+2+2)

(a) $\exists((>)y)$

(b) $(x \le y \wedge y \le x) \wedge (y \le z \wedge z \le y)$

(c) Jeder Term, der 1 zurück gibt, ist $\mathcal{A}$-äquivalent, z.B. $x \le x$.

Aufgabe 13.7: Definition logischer Konstanten (1+1+1+1+1+3) Definiere:

(a) $(\neg) = \lambda x.x \Rightarrow ff$, da $\neg A \Leftrightarrow A \Rightarrow ff$ gilt.

(b) $(\vee) = \lambda x.(\Rightarrow)(\neg x)$, da $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow B$ gilt.

(c) $(\wedge) = \lambda xy.\neg(x \Rightarrow (\neg y))$, da $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow (\neg B))$ gilt.

(d) $(\forall) = \lambda f.\neg(\exists\lambda x.\neg(fx))$, da $\forall x.A \Leftrightarrow \neg\exists x.\neg A$ gilt.

(e) $(\exists!) = \lambda f.(\exists x.fx) \wedge (\forall x \forall y.fx \wedge fy \Rightarrow x = y)$,
da $\exists! x.A(x) \Leftrightarrow \exists x.A(x) \wedge \forall y, z(A(y) \wedge A(z) \Rightarrow y = z)$. Benutze $\forall x.A$ als Abk. für $\forall\lambda x.A$.

(f) $(=) = \lambda xy.\forall' f.\ fx \Rightarrow fy$

Benutze die Idee, dass zwei Zahlen gleich sind , genau dann wenn alle möglichen Prädikate diese beiden Zahlen nicht unterscheiden (Leibnitz).

Aufgabe 13.8: Selektionsoperator (4+4+4)

(a) $\lambda mn.\,!\,(\lambda e.\, m{=}e{+}n)$

(b) $\lambda mn.\,!\,(\lambda e.\, \exists r.\, m{=}e{\cdot}n{+}r \wedge r{<}n)$

(c) $\lambda mn.\,!\,(\lambda r.\, \exists e.\, m{=}e{\cdot}n{+}r \wedge r{<}n)$