Programmierung WS 2002 / 03: Musterlösung zum 6. Übungsblatt

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Thorsten Brunklaus

Aufgabe 6.1: Natürliche Induktion $(9 = 2 + 5 + 2)$

(a)

$$\forall n \in \mathbb{Z}:\ n \geq 1 \Rightarrow n \succ n - 1$$

(b) **Beweis** Durch natürliche Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n = 0$. Dann

$$\begin{aligned} f(n) &= f(0) = 1 && \text{Definition von } f \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Sei $n > 0$. Dann

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + 2n + 1 && \text{Definition von } f \\ &= ((n-1)+1)^2 + 2n + 1 && \text{Induktionsannahme für } n-1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

□

(c)

$$\begin{aligned} \text{Grundmenge} &: \mathbb{N} \\ \text{Aussagemenge} &: \{\ n \in \mathbb{N} \mid f(n) = (n+1)^2\ \} \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2: Natürliche Induktion $(10 = 3 + 2 + 5)$

(a)

$$\begin{aligned} &f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ &f(n) = \text{if } n \leq 1 \text{ then } 1 \text{ else } f(n-1) + 2n - 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\forall n \in \mathbb{Z}:\ n > 1 \Rightarrow n \succ n - 1$$

(c) **Beweis** Durch natürliche Induktion über $n \in \mathbb{N}^+$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n = 1$. Dann

$$\begin{aligned} f(n) &= f(1) = 1 && \text{Definition von } f \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Sei $n > 1$. Dann

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + 2n - 1 && \text{Definition von } f \\ &= (n-1)^2 + 2n - 1 && \text{Induktionsannahme für } n-1 \\ &= n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.3: Natürliche Induktion $(10 = 3 + 2 + 5)$

(a)

$$\begin{aligned} & f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ & f(n) = \text{if } n < 1 \text{ then } 0 \text{ else } f(n-1) + n^2 \end{aligned}$$

(b)

$$\forall n \in \mathbb{Z}\colon\ n \geq 1 \Rightarrow n \succ n-1$$

(c) **Beweis** Durch natürliche Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n = 0$. Dann

$$\begin{aligned} f(n) = f(0) = 0 && \text{Definition von } f \\ = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1) \end{aligned}$$

Sei $n > 0$. Dann

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + n^2 && \text{Definition von } f \\ &= \frac{n-1}{6}(2(n-1)^2 + 3(n-1) + 1) + n^2 && \text{Induktionsannahme für } n-1 \\ &= \frac{n-1}{6}(2n^2 - n) + n^2 \\ &= \frac{(n-1)(2n^2 - n) + 6n^2}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.4: Natürliche Induktion $(12 = 3 + 2 + 5 + 2)$

(a)

$$\begin{aligned} & f \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & f(q, n) = \text{if } n < 1 \text{ then } 1 \text{ else } f(q, n-1) + q^n \end{aligned}$$

(b)

$$\forall q \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq 1 \Rightarrow (q, n) \succ (q, n-1)$$

(c) **Beweis** Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$. Wir zeigen $\forall n \in \mathbb{N} : f(q,n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ durch natürliche Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n = 0$. Dann

$$\begin{aligned} f(q,n) &= f(q,0) = 1 && \text{Definition von } f \\ &= q^0 = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$

Sei $n > 0$. Dann

$$\begin{aligned} f(q,n) &= f(q,n-1) + q^n && \text{Definition von } f \\ &= \frac{1-q^{(n-1)+1}}{1-q} + q^n && \text{Induktionsannahme für } n-1 \\ &= \frac{1-q^n + (1-q)q^n}{1-q} \\ &= \frac{1-q^n + q^n - q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$

□

(d)

$$\begin{aligned} \text{Grundmenge} &: \mathbb{N} \\ \text{Aussagemenge} &: \{\, n \in \mathbb{N} \mid f(q,n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \,\} \end{aligned}$$

Aufgabe 6.5: Strukturelle Induktion für Listen ($29 = 5 + 4 * 6$)

(a) **Beweis** Durch strukturelle Induktion über $xs \in \mathcal{L}(X)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $xs = nil$. Dann $xs@nil = nil = xs$ mit der Definition von @.

Sei $xs = x :: xr$. Dann

$$\begin{aligned} (x :: xr)@nil &= x :: (xr@nil) && \text{Definition von @} \\ &= x :: xr && \text{Induktionsannahme für } xr \\ &= xs \end{aligned}$$

□

(b) **Beweis** Durch strukturelle Induktion über $xs \in \mathcal{L}(X)$. Sei $ys \in \mathcal{L}(X)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $xs = nil$. Dann

$$\begin{aligned} |xs@ys| &= |ys| && \text{Definition von @} \\ &= |xs| + |ys| && \text{Definition von } |\_| \end{aligned}$$

Sei $xs = x :: xr$. Dann

$$\begin{aligned} |xs@ys| &= |x :: (xr@ys)| && \text{Definition von @} \\ &= 1 + |xr@ys| && \text{Definition von } |\_| \\ &= 1 + |xr| + |ys| && \text{Induktionsannahme für } xr \\ &= |xs| + |ys| && \text{Definition von } |\_| \end{aligned}$$

□

(c) **Beweis** Durch strukturelle Induktion über $xs \in \mathcal{L}(X)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $xs = nil$. Dann $|rev(nil)| = |nil| = |xs|$ mit der Definition von @.

Sei $xs = x :: xr$. Dann

$$\begin{aligned} |rev(xs)| &= |rev(xr)@[x]| && \text{Definition von } rev \\ &= |rev(xr)| + |[x]| && \text{Teil (b)} \\ &= |xr| + 1 && \text{Induktionsannahme für } xr \text{ und Definition von } |\_| \\ &= |xs| && \text{Definition von } |\_| \end{aligned}$$

□

(d) **Beweis** Durch strukturelle Induktion über $xs \in \mathcal{L}(X)$. Sei $ys \in \mathcal{L}(X)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $xs = nil$. Dann

$$\begin{aligned} rev(xs@ys) &= rev(ys) && \text{Definition von @} \\ &= rev(ys)@nil && \text{Teil (a)} \\ &= rev(ys)@rev(xs) && \text{Definition von } rev \end{aligned}$$

Sei $xs = x :: xr$. Dann

$$\begin{aligned} rev(xs@ys) &= rev(x :: (xr@ys)) && \text{Definition von @} \\ &= rev(xr@ys)@[x] && \text{Definition von } rev \\ &= (rev(ys)@rev(xr))@[x] && \text{Induktionsannahme für } xr \\ &= rev(ys)@(rev(xr)@[x]) && (*) \\ &= rev(ys)@rev(xs) && \text{Definition von } rev \end{aligned}$$

□

(e) **Beweis** Durch strukturelle Induktion über $xs \in \mathcal{L}(X)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $xs = nil$. Dann $rev(rev(xs)) = rev(nil) = nil = xs$. mit der Definition von *rev*

Sei $xs = x :: xr$. Dann

$$\begin{aligned}
rev(rev(xs)) &= rev(rev(xr)@[x]) && \text{Definition von } rev \\
&= rev([x])@rev(rev(xr)) && \text{Teil (d)} \\
&= [x]@xr && \text{Definition von } rev \text{ und Induktionsannahme für } xr \\
&= xs && \text{Definition von @}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.6: Strukturelle Induktion für Listen $(12 = 3 + 2 + 5 + 2)$

(a)

$$\begin{aligned}
&f \in \mathcal{L}(X) \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\
&\quad f(nil, n) = n \\
&f(x :: xr, n) = f(xr, n + 1)
\end{aligned}$$

(b)

$$\forall (x :: xr) : \forall n \in \mathbb{Z} : \ (x :: xr, n) \succ (xr, n + 1)$$

(c) **Beweis** Durch strukturelle Induktion über $xs \in \mathcal{L}(X)$. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $xs = nil$. Dann

$$\begin{aligned}
f(xs, n) &= n && \text{Definition von } f \\
&= |xs| + n && \text{Definition von } |_|
\end{aligned}$$

Sei $xs = x :: xr$. Dann

$$\begin{aligned}
f(xs, n) &= f(xr, n + 1) && \text{Definition von } f \\
&= |xr| + n + 1 && \text{Induktionsannahme für } xr \\
&= |xs| + n && \text{Definition von } |_|
\end{aligned}$$

□

(d)

$$\begin{aligned}
\text{Grundmenge} &: \mathcal{L}(X) \\
\text{Aussagemenge} &: \{\ xs \in \mathcal{L}(X) \mid \forall n \in \mathbb{Z} : \ f(xs, n) = |xs| + n\ \}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.7: Strukturelle Rekursion für Bäume $(18 = 3 * 6)$

(a) **Beweis** Durch strukturelle Induktion über $t \in \mathcal{T}(X)$, wobei t ein Binärbaum ist. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $t = (x, nil)$. Dann $b(t) = 1 \leq 2^{d(t)}$ durch Nachrechnen mit den Definitionen von b und d.

Sei $t = (x, [t_1, t_2])$. Dann sind t_1 und t_2 Binärbäume und es gilt

$$
\begin{aligned}
b(t) &= b(t_1) + b(t_2) && \text{Definition von } b \\
&\leq 2^{d(t_1)} + 2^{d(t_2)} && \text{Induktionsannahmen für } t_1 \text{ und } t_2 \\
&\leq 2 * 2^{max(d(t_1), d(t_2))} \\
&= 2^{max(d(t_1), d(t_2))+1} && \text{Definition von } d \\
&= 2^{d(t)}
\end{aligned}
$$

□

(b) **Beweis** Durch strukturelle Induktion über $t \in \mathcal{T}(x)$, wobei t ein balancierter ternärer Baum ist. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $t = (x, nil)$. Dann $b(t) = 1 = 3^0 = 3^{d(t)}$ durch Nachrechnen mit den Definitionen von b und d.

Sei $t = (x, [t_1, t_2, t_3])$. Dann sind t_1, t_2 und t_3 balancierte ternäre Bäume und es gilt

$$
\begin{aligned}
b(t) &= b(t_1) + b(t_2) + b(t_3) && \text{Definition von } b \\
&= 3^{d(t_1)} + 3^{d(t_2)} + 3^{d(t_3)} && \text{Induktionsannahmen für } t_1, t_2, t_3 \\
&= 3^{d(t)-1} + 3^{d(t)-1} + 3^{d(t)-1} && t \text{ balanciert, also } d(t_1) = d(t_2) = d(t_3) = d(t) - 1 \\
&= 3^{d(t)}
\end{aligned}
$$

□

(c) **Beweis** Durch strukturelle Induktion über $t \in \mathcal{T}(X)$, wobei t ein balancierter ternärer Baum ist. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $t = (x, nil)$. Dann $s(t) = 1 = \frac{1}{2}(3^{d(t)+1} - 1)$ durch Nachrechnen mit den Definitionen von s und d.

Sei $t = (x, [t_1, t_2, t_3])$. Dann sind t_1, t_2 und t_3 balancierte ternäre Bäume und es gilt

$$
\begin{aligned}
s(t) &= 1 + s(t_1) + s(t_2) + s(t_3) && \text{Definition von } s \\
&= 1 + \frac{1}{2}(3^{d(t_1)+1} - 1 + 3^{d(t_2)+1} - 1 + 3^{d(t_3)+1} - 1) && \text{Induktionsannahmen für } t_1, t_2, t_3 \\
&= 1 + \frac{1}{2}(3 \cdot 3^{d(t)} - 3) && t \text{ balanciert} \\
&= \frac{1}{2}(3^{d(t)+1} - 1)
\end{aligned}
$$

□