Programmierung WS 2002 / 03:
Musterlösung zum 7. Übungsblatt

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Thorsten Brunklaus

Aufgabe 7.1: Iteratives Tabulate (5)

```
fun tabulate' f n a = if n<0 then a else tabulate' f (n-1) ((f n)::a)

fun tabulate f n = tabulate' f n nil
```

Aufgabe 7.2: Reversierendes Map ($10 = 4 + 6$)

(a)
```
fun rmap f = foldl (fn (x, e) => (f x)::e) nil
```

(b)
```
fun rmap' f nil a     = a
|   rmap' f (x::xr) a = rmap' f xr ((f x)::a)

fun rmap f xs = rmap' f xs nil
```

Aufgabe 7.3: Iteratives Berechnen von balancierten Binärbäumen ($18 = 3 * 6$)

(a)
```
fun tree 0 = T((), nil)
|   tree n = T((), [tree (n - 1), tree(n - 1)])
```

(b)
```
fun tree' 0 a = a
|   tree' n a = tree' (n - 1) (T((), [a, a]))

fun tree n = tree' n (T((), nil))
```

(c)
```
fun tree' n t d = if n <= d then t
                  else tree' n (T(d + 1, [t, t])) (d + 1)

fun tree n = tree' n (T(0, nil)) 0
```

Aufgabe 7.4: Rekursionsbäume und Laufzeit ($10 = 2 + 1 + 2 + 5$)

(a)
```
                    p 8
                 /       \
             p 7           p 4
            /   \         /   \
         p 6     p 3   p 3     p 2
        /   \
     p 5     p 3
    /   \
 p 4     p 2
/   \
p 3  p 2
```

(b) `p 8` hat die Laufzeit 13.

(c)
```
fun phi n = if n<4 then 1 else 1 + phi(n-1) + phi(n div 2)
```

(d)

$$r = \{\ (n, n-1) \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4\ \} \cup \{\ (n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4\ \}$$

p terminiert, da $r \subseteq NO(\mathbb{N})^{\succ}$.

Aufgabe 7.5: Rekursionsbäume und Laufzeit $(13 = 2 + 1 + 4 + 2 + 4)$

(a)
```
f(3,45)
   |
f(2,46)
   |
f(1,47)
   |
f(0,48)
```

(b) Ja.

(c) $\min\{x, y\} + 1$.

(d) `fun g (x,y) = x+y`.

(e)

$$\begin{aligned}&\{\ ((m, n), (m-1, n+1)) \mid m \in \mathbb{N}^+ \wedge n \in \mathbb{N}^+ \wedge m < n\} \cup \\ &\quad \{\ ((m, n), (m+1, n-1)) \mid m \in \mathbb{N}^+ \wedge n \in \mathbb{N}^+ \wedge m \geq n\}\end{aligned}$$

$$\lambda\,(m, n) \in \mathbb{N}^2.\ \min(m, n)$$

Aufgabe 7.6: Größter gemeinsamer Teiler $(23 = 1 + 2 + 2 + 4 + 6 + 6 + 2)$

(a) Ja.

(b)
```
gcd(216,60)
     |
gcd(156,60)
     |
 gcd(96,60)
     |
 gcd(36,60)
     |
 gcd(36,24)
     |
 gcd(12,24)
     |
 gcd(12,12)
```

(c)

$$r = \{\ ((x, y), (x, y - x)) \mid x \in \mathbb{N}^+ \wedge y \in \mathbb{N}^+ \wedge x < y\ \} \cup$$
$$\{\ ((x, y), (x - y, y)) \mid x \in \mathbb{N}^+ \wedge y \in \mathbb{N}^+ \wedge x > y\ \}$$

(d)

$$\lambda\,(x, y) \in \mathbb{N}^2 \,\textbf{.}\; x + y$$

Ja, Terminierung von *gcd* folgt aus Einbettung von r in $NO(\mathbb{N})^{\succ}$.

(e) Es genügt zu zeigen, dass die Funktion

$$ggt \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$$
$$ggt(x, y) = \max(T(x) \cap T(y))$$

die definierende Gleichung von `gcd` für alle $(x, y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ erfüllt.

Da $\forall x \in \mathbb{N}^+ : ggt(x, x) = x$, genügt es zu zeigen, daß

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^+ :\ x > y \;\Rightarrow\; T(x - y) \cap T(y) = T(x) \cap T(y)$$

gilt. Seien $x, y \in \mathbb{N}^+$ mit $x > y$.
Sei $k \in T(x - y) \cap T(y)$. Dann existieren $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $x - y = n \cdot k$ und $y = n' \cdot k$. Also

$$x = x - y + y = n \cdot k + n' \cdot k = (n + n') \cdot k$$

Also $k \in T(x) \cap T(y)$.
Sei $k \in T(x) \cap T(y)$. Dann existieren $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $x = n \cdot k$ und $y = n' \cdot k$. Also

$$x - y = n \cdot k - n' \cdot k = (n - n') \cdot k.$$

Also $k \in T(x - y) \cap T(y)$.

(f) Die Laufzeit ϕ ist eine Funktion $\in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ mit

$$(*) \quad \phi(x, y) = \text{if } x = y \text{ then } 1 \text{ else if } x < y \text{ then } 1 + \phi(x, y - x) \text{ else } 1 + \phi(x - y, y)$$

Beweis Wir zeigen

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ : \ \phi(x, y) \leq \max(x, y)$$

durch Induktion über $(x, y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ mit r^{-1} (r ist die Rekursionsrelation von `gcd`, siehe Teil (c)). Wir unterscheiden drei Fälle.

Sei $x = y$. Dann $\phi(x, y) = 1 \leq \max\{x, y\}$.

Sei $x < y$. Dann

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= 1 + \phi(x, y - x) && (*) \\ &\leq 1 + \max\{x, y - x\} && \text{Induktionsannahme} \\ &\leq \max\{x, y\} \end{aligned}$$

Sei $x > y$. Dann

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= 1 + \phi(x - y, y) && (*) \\ &\leq 1 + \max\{x - y, y\} && \text{Induktionsannahme} \\ &\leq \max\{x, y\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Grundmenge} &: \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \\ \text{Induktionsrelation} &: r^{-1} \end{aligned}$$

□

(g) $y = 1$

Aufgabe 7.7: Laufzeitsynthese ($21 = 7 * 2 + 7 * 1$)

(a)
```
fun tlogn n  = if n<1 then ()
               else tlogn(n div 2)

fun tn n     = if n<1 then ()
               else tn(n-1)


fun tnlogn n = if n<1 then ()
               else (tn n ; tnlogn(n div 2) ; tnlogn(n div 2))


fun tn2 n    = tn(n*n)


fun tn3 n    = tn(n*n*n)


fun t2n n    = if n<1 then ()
               else (t2n(n-1) ; t2n(n-1))
```

```
fun t3n n = if n<1 then ()
            else (t3n(n-1) ; t3n(n-1) ; t3n(n-1))
```

(b)

```
fun tlogn n  = if n<1 then 1
               else 1 + tlogn(n div 2)

fun tn n     = if n<1 then 1
               else 1 + tn(n-1)

fun tnlogn n = if n<1 then 1
               else 1 + tn n + tnlogn(n div 2) + tnlogn(n div 2)

fun tn2 n    = tn(n*n)

fun tn3 n    = tn(n*n*n)

fun t2n n    = if n<1 then 1
               else 1 + t2n(n-1) + t2n(n-1)

fun t3n n    = if n<1 then 1
               else 1 + t3n(n-1) + t3n(n-1) + t3n(n-1)
```