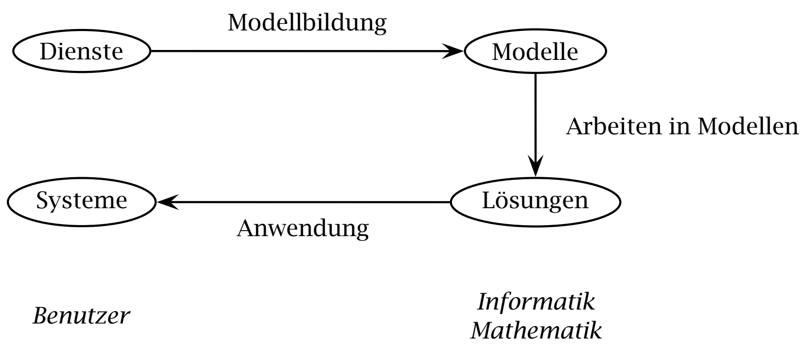
Kapitel 2

Mengenlehre

Informatiker bauen Systeme, die Dienste zur Verfügung stellen, die von Einzelpersonen, Firmen oder Institutionen gewünscht oder benötigt werden. Die Analyse der gewünschten Dienste und der Entwurf der entsprechenden Systeme erfordert die Konstruktion von gedanklichen Modellen. Entsprechend spielen Methoden und Werkzeuge für die Konstruktion und Analyse von gedanklichen Modellen in der Informatik eine wichtige Rolle. Dabei profitiert die Informatik ganz erheblich von der jahrhundertelangen Vorarbeit der Mathematik. Grafisch lassen sich die angesprochenen Zusammenhänge wie folgt darstellen:



Die Grundlage für die Konstruktion von präzisen gedanklichen Modellen ist die so genannte Mengenlehre. Diese stellt zum einen eine universelle Klasse von vollständig bestimmten Objekten zur Verfügung (Zahlen, Tupel, Mengen), aus denen alle Modelle konstruiert werden können. Zum anderen liefert die Mengenlehre eine Reihe von Standardmodellen (z. B. Graphen, Relationen, Funktionen, Ordnungen), die sich als Bausteine für die Konstruktion komplexerer Modelle eignen. Diese Standardmodelle sorgen dafür, dass man bei einer Modellbildung auf etablierte Begriffsbildungen und eine Vielzahl von Ergebnissen zurückgreifen kann. Keine präzise Wissenschaft kommt heute ohne die Mengenlehre aus.

Im Folgenden geben wir eine auf die Bedürfnisse der Programmierung ausgerichtete Einführung in die Mengenlehre. Die dabei behandelten Begriffe und

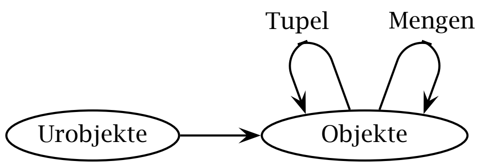
Notationen gehören zum Standardvokabular jedes akademischen Informatikers.

2.1 Urobjekte, Tupel und Mengen

Wir legen jetzt fest, was wir unter einem *mathematischen Objekt* verstehen wollen. Unsere Festlegung ist derart, dass wir einen fixen Vorrat von mathematischen Objekten bekommen, in dem alle später zu betrachtenden Objekte bereits enthalten sind. Es geht später also nicht darum, neuartige mathematische Objekte zu erfinden, sondern darum, aus dem bereits vorhandenen Vorrat Objektklassen mit interessanten Eigenschaften auszuwählen.[1]

Zunächst legen wir fest, dass es drei Klassen von mathematischen Objekten gibt: **Urobjekte**, **Tupel** und **Mengen**. Jedes mathematische Objekt gehört zu genau einer dieser Klassen. Es ist also ausgeschlossen, dass ein Urobjekt eine Menge ist, oder das eine Menge ein Tupel ist. Der Kürze halber sprechen wir im Folgenden statt von mathematischen Objekten einfach von Objekten.

Die Klasse der Urobjekte wird vorgegeben. Tupel und Mengen werden aus Urobjekten oder bereits gebildeten Objekten **gebildet**. Diejenigen Objekte, aus denen ein Tupel oder eine Menge gebildet ist, bezeichnen wir als seine **Konstituenten**. Objekte, die mit mindestens einer Konstituente gebildet sind, heißen **zusammengesetzt**. Alle anderen Objekte heißen **atomar**. Alle Urobjekte sind atomar. Außerdem gibt es genau ein atomares Tupel, das so genannte **leere Tupel**, und genau eine atomare Menge, die so genannte **leere Menge**. Den gerade beschriebenen Bildungsprozess für mathematische Objekte stellen wir wie folgt dar:



Ein Tupel oder eine Menge kann immer nur aus bereits gebildeten Objekten gebildet werden. In der ersten Phase können Tupel und Mengen also nur mithilfe von Urobjekten gebildet werden. In einer späteren Phase können Tupel und Mengen auch mit mit Tupeln und Mengen gebildet werden, die in vorherigen Phasen gebildet wurden.

[1] Mithilfe der so genannten Binärcodierung kann jeder Roman, jedes Bild und jedes Musikstück mit einer Folge von Nullen und Einsen dargestellt werden. Diese Tatsache, der Computer ihre multimedialen Fähigkeiten verdanken, bedeutet, dass es alle Romane, Bilder und Musikstücke, die es jemals geben wird, bereits gibt. Aus dieser Sicht gesehen wählen die Autoren „neuer" Kunstwerke also lediglich unbekannte Werke aus dem bereits bekannten Vorrat aller Werke aus.

Weiter legen wir fest, dass es sich bei mathematischen Objekten um unveränderliche Objekte handelt. Außerdem steht für zwei mathematische Objekte x und y immer fest, ob sie **gleich** ($x = y$) oder **ungleich** ($x \neq y$) sind. Wenn x und y gleich sind, handelt es sich bei x und y um ein und dasselbe Objekt; wenn x und y ungleich sind, handelt es sich bei x und y um verschiedene Objekte.

Für die Wahl der Urobjekte gibt es verschiedene Möglichkeiten. Wir nehmen an, dass es sich bei den Urobjekten genau um die reellen Zahlen handelt.

Wir müssen jetzt noch erklären, wie Tupel und Mengen gebildet werden.

Tupel
Ein **Tupel** ist eine Aneinanderreihung

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

von Objekten. Die Anzahl n der Positionen der Aneinanderreihung wird als **Länge des Tupels** bezeichnet ($n \geq 0$). Die **Positionen** eines Tupels der Länge n sind die natürlichen Zahlen 1 bis n. Man spricht von der ersten, zweiten und allgemein von der ***i*-ten Komponente** eines Tupels und meint damit das Objekt, das an der entsprechenden Position des Tupels steht. Hier sind Beispiele:

- $\langle 1, 1, 1 \rangle$ ist ein Tupel der Länge 3. Es hat nur eine Konstituente (die Zahl 1). Bei der ersten, zweiten und dritten Komponente des Tupels handelt es sich jeweils um die Zahl 1.

- $\langle 1, \langle 2, 3 \rangle \rangle$ ist ein Tupel der Länge 2. Es hat zwei Konstituenten (die Zahl 1 und das Tupel $\langle 2, 3 \rangle$). Die erste Komponente des Tupels ist die Zahl 1. Die zweite Komponente des Tupels ist das Tupel $\langle 2, 3 \rangle$.

Das **Gleichheitsaxiom für Tupel** formuliert eine wichtige Grundannahme: Zwei Tupel $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ und $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$ sind genau dann gleich, wenn sie die gleiche Länge haben ($m = n$) und wenn zwei sich entsprechenden Komponenten immer gleich sind ($x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$). Bei $\langle 1, 2 \rangle$, $\langle 2, 1 \rangle$ und $\langle 2, 1, 1 \rangle$ handelt es sich also um drei verschiedene Tupel.

Das eindeutig bestimmte Tupel der Länge 0 heißt **leeres Tupel** und wird erwartungsgemäß mit $\langle \rangle$ bezeichnet.

Tupel der Länge n werden auch als ***n*-stellige Tupel** bezeichnet. Zweistellige Tupel werden auch als **Paare** und dreistellige Tupel auch als **Tripel** bezeichnet.

Tupel $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ mit mindestens zwei Positionen können auch mit runden Klammern geschrieben werden: $(x_1, \dots, x_n)$.

Mengen
Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten. Die Konstituenten einer Menge werden als die **Elemente** der Menge bezeichnet. Das **Gleichheitsaxiom für Mengen** formuliert eine wichtige Grundannahme: Zwei Mengen X und Y sind

genau dann gleich, wenn jedes Element von X ein Element von Y ist, und wenn umgekehrt auch jedes Element von Y ein Element von X ist.

Anders als ein Tupel ist eine Menge also eindeutig durch ihre Konstituenten bestimmt. Zum Beispiel gibt es unendlich viele verschiedene Tupel, die nur mit der Konstituente 1 gebildet sind, aber nur eine Menge, die nur das Element 1 hat. Eine Menge legt keine Anordnung für ihre Elemente fest.

Man sagt, dass eine Menge aus ihren Elementen **besteht**. Man sagt auch, dass eine Menge ihre Elemente **enthält**. Man schreibt $x \in X$, um zu sagen, dass das Objekt x ein Element der Menge X ist. Statt „x ist ein Element von X" sagt man auch kürzer „x **ist in** X".

Die eindeutig bestimmte Menge ohne Elemente heißt **leere Menge** und wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.

Mengen können unendlich viele Elemente haben. Unter einer **endlichen Menge** versteht man eine Menge, die nur endlich viele Elemente hat, und unter einer **unendlichen Menge** versteht man eine Menge, die unendlich viele Elemente hat. Der Prototyp einer unendlichen Menge ist die Menge, die aus allen natürlichen Zahlen besteht.

Unter einer **einelementigen Menge** versteht man eine Menge, die genau ein Element hat. Allgemeiner versteht man unter einer n**-elementigen Menge** ($n \geq 1$) eine endliche Menge, die genau n verschiedene Elemente hat.

Endliche Mengen kann man durch Aufzählung ihrer Elemente beschreiben. Hier sind Beispiele:

- $\{1\}$ ist eine einelementige Menge. Das einzige Element dieser Menge ist die Zahl 1.

- $\{1, 2, 3\}$ ist eine dreielementige Menge. Die Elemente dieser Menge sind die Zahlen 1, 2 und 3.

Es ist wichtig, zwischen einer Menge und ihren *Beschreibungen* zu unterscheiden. Beispielsweise handelt es sich bei

$$\{1, 2, 3\} \qquad \{2, 1, 3\} \qquad \{1, 2, 3, 1\}$$

um drei verschiedene Beschreibungen ein und derselben Menge (die Menge, die nur aus den Elementen 1, 2, 3 besteht).

Teilobjekte

Die **Teilobjekte** eines Objektes x sind wie folgt definiert:

1. x ist ein Teilobjekt von x.

2. Jedes Teilobjekt einer Konstituente von x ist ein Teilobjekt von x.

Ein Teilobjekt y von x heißt **echtes Teilobjekt** von x, wenn y und x verschieden sind.

Ein Objekt ist atomar, wenn es kein echtes Teilobjekt hat, und zusammengesetzt, wenn es mindestens ein echtes Teilobjekt hat. Hier sind Beispiele:

- Die Menge $\{1\}$ hat 1 echtes Teilobjekte: die Zahl 1.
- Das Tupel $\langle 1, 1, 2\rangle$ hat 2 echte Teilobjekte: die Zahlen 1 und 2.
- Die Menge $\{1,\ \langle 1, 2\rangle\}$ hat 3 echte Teilobjekte: das Tupel $\langle 1, 2\rangle$ und die Zahlen 1 und 2.

Die Konstituenten eines Objekts werden auch als **direkte Teilobjekte** oder als **Unterobjekte** bezeichnet.

Ein Objekt heißt **finitär**, wenn es nur endlich viele Teilobjekte hat, und **infinitär**, wenn es unendlich viele Teilobjekte hat.

Es gibt endliche Mengen, die infinitär sind. Wenn X eine unendliche Menge ist (zum Beispiel die Menge aller natürlichen Zahlen), dann ist $\{X\}$ eine endliche aber infintäre Menge.

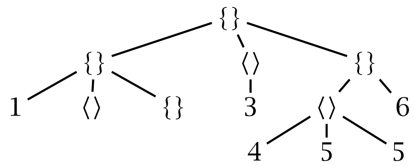
Ein Objekt ist genau dann infinitär, wenn eines seiner Teilobjekte eine unendliche Menge ist.

Der Begriff des Unendlichen ist ein interessantes mathematisches Konzept, dessen systematische Untersuchung Georg Cantor (1845-1918) zur Erfindung der Mengenlehre führte. Um 1900 entdeckte Bertrand Russell, dass eine völlig uneingeschränkte Existenzannahme für unendliche Mengen zu einem in sich widersprüchlichen Gedankengebäude führt (Russellsche Antinomien). Das ist beispielsweise der Fall, wenn man die Existenz einer Menge annimmt, die alle Objekte enthält. Das Problem lässt sich jedoch einfach dadurch lösen, dass man, so wie wir das getan haben, die Bildung einer Mengen erst dann erlaubt, wenn ihre Elemente bereits gebildet sind. Diese Einschränkung lässt sich auch mit dem so genannte **Wohlfundiertheitsaxiom** formulieren: Es gibt keine unendliche Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ von Objekten, sodass x_{n+1} für alle n eine Konstituente von x_n ist. Wohlfundiertheit bedeutet, dass man bei einem zusammengesetzten Objekt nach endlich vielen Abstiegen zu einer Konstituente stets auf ein atomares Objekt stößt.

Baumdarstellung
Manchmal ist es hilfreich, den Aufbau eines zusammengesetzten Objektes grafisch darzustellen. Als Beispiel betrachten wir die Menge

$$\{\{1,\ \langle\rangle,\ \emptyset\},\ \langle 3\rangle,\ \{\langle 4,\ 5,\ 5\rangle,\ 6\}\}$$

Den Aufbau dieses Objektes können wir mit einer so genannten **Baumdarstellung** verdeutlichen:



Die Linien in dieser Darstellung stellen Konstituentenbeziehungen dar. Das dargestellte Objekt hat insgesamt 11 echte Teilobjekte: Die Zahlen 1, 3, 4, 5 und 6, das leere Tupel und die leere Menge, die Tupel $\langle 3\rangle$ und $\langle 4,5,5\rangle$, und die Mengen $\{1,\langle\rangle,\emptyset\}$ und $\{\langle 4,5,5\rangle,\ 6\}$.

2.2 Aussagen und logische Notationen

Unter einer mathematischen Aussage verstehen wir eine Eigenschaft mathematischer Objekte, die entweder *wahr* oder *falsch* ist. Ein typisches Beispiel für eine mathematische Aussage ist die Gleichung $1 + 1 = 3$. Statt wahr sagen wir auch *gültig* und statt falsch auch *ungültig*.

Wir verwenden die folgenden **logischen Notationen** für zusammengesetzte Aussagen (A und B sind Aussagen, X ist eine Menge):

$A \wedge B$	A und B	**Konjunktion**
$A \vee B$	A oder B	**Disjunktion**
$\neg\ A$	nicht A	**Negation**
$A \Longrightarrow B$	wenn A, dann B	**Implikation**
$A \iff B$	A genau dann, wenn B	**Äquivalenz**
$\forall x \in X\colon A$	für alle $x \in X$ gilt A	**Universelle Quantifizierung**
$\exists x \in X\colon A$	es existiert $x \in X$ sodass A	**Existentielle Quantifizierung**

Die Bedeutung dieser Aussagen definieren wir wie folgt:

- $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B beide wahr sind.
- $A \wedge B$ ist genau dann falsch, wenn A und B beide falsch sind. Sie ist also genau dann wahr, wenn A oder B oder $A \wedge B$ wahr ist.
- $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.
- $A \Longrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn $\neg A \vee B$ wahr ist. Sie ist also insbesondere dann wahr, wenn A falsch ist.
- $A \iff B$ ist genau dann wahr, wenn A und B entweder beide wahr oder beide falsch sind.

$$
\begin{array}{rcll}
\neg(A \wedge B) & \iff & \neg A \vee \neg B & \\
\neg(A \vee B) & \iff & \neg A \wedge \neg B & \\
A \implies B & \iff & \neg A \vee B & \\
A \implies B & \iff & \neg B \implies \neg A & \textbf{Kontraposition} \\
\neg(A \implies B) & \iff & A \wedge \neg B & \\
(A \iff B) & \iff & (A \implies B) \ \wedge \ (B \implies A) & \\
\neg\, \forall x \in X\colon A & \iff & \exists x \in X\colon \neg A & \\
\neg\, \exists x \in X\colon A & \iff & \forall x \in X\colon \neg A &
\end{array}
$$

Abbildung 2.1: Einige allgemein gültige Äquivalenzen

- $\forall x \in X\colon A$ ist genau dann wahr, wenn A für alle $x \in X$ wahr ist. Dabei spielt x die Rolle einer Variablen. Wir vereinbaren, dass $\forall x \in X\colon A$ für den Extremfall $X = \emptyset$ wahr ist.
- $\exists x \in X\colon A$ ist genau dann wahr, wenn A für mindestens ein $x \in X$ wahr ist. Dabei spielt x die Rolle einer Variablen. Wir vereinbaren, dass $\exists x \in X\colon A$ für den Extremfall $X = \emptyset$ falsch ist.

Beachten Sie vor allem die Definitionen der Bedeutungen von disjunktiven und implikativen Aussagen. In der Umgangssprache werden „oder“ und „wenn dann“ manchmal mit anderer Bedeutung verwendet. Dagegen verwenden die mathematische Sprache und dieses Buch „oder“ und „wenn dann“ nur mit der oben definierten Bedeutung.

Abbildung 2.1 gibt einige allgemein gültige Äquivalenzen an. Allgemeingültigkeit bedeutet, dass diese Äquivalenzen für alle Aussagen A und B und für jede Menge X gültig sind.

Die im letzten Abschnitt angegebenen Gleichheitsaxiome für Mengen und Tupel können mithilfe der eingeführten logischen Notationen übersichtlich formuliert werden:

$$
\begin{aligned}
X = Y \quad &\iff \quad (\forall x \in X\colon x \in Y) \ \wedge \ (\forall y \in Y\colon y \in X) \\
\langle x_1, \dots, x_m \rangle = \langle y_1, \dots, y_n \rangle \quad &\iff \quad m = n \ \wedge \ x_1 = y_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ x_n = y_n
\end{aligned}
$$

Hier sind kurze Erklärungen für einige wichtige mathematische Begriffe, die wir entweder schon benutzt haben oder bald benutzen werden:

- **Primitive Begriffe** sind Begriffe, die nicht vollständig erklärt werden. Beispiele für primitive Begriffe sind die Begriffe Menge, Tupel und Aussage. Man versucht, mit möglichst wenigen primitiven Begriffen auszukommen.

- **Definierte Begriffe** sind Begriffe, die mithilfe schon bekannter Begriffe vollständig erklärt werden. Beispiele für definierte Begriffe sind die Begriffe gerichteter Graph, binäre Relation und Funktion, die wir in diesem Kapitel definieren werde.
- **Notationen** sind symbolische Beschreibungen. Beispiele für Notationen sind die oben eingeführten logischen Notationen. Bei der Definition von Notationen verwenden wir oft die Symbole $\overset{\text{def}}{=}$ und $\overset{\text{def}}{\iff}$ (siehe nächster Abschnitt).
- **Axiome** sind Aussagen, die grundlegende Annahmen formulieren, die nicht bewiesen werden. Beispiele für Axiome sind die Gleichheitsaxiome für Tupel und Mengen und das Wohlfundiertheitsaxiom für mathematische Objekte.
- **Sätze** sind Aussagen, die bewiesen werden können.
- **Propositionen** sind Sätze, deren Beweis relativ einfach ist.
- **Beweise** sind vollständige und nachvollziehbare Argumentationen, die zweifelsfrei zeigen, dass eine Aussage gültig ist.

Hier ist ein Beispiel für eine Proposition und ihren Beweis.

Proposition 2.2.1 *Es gibt keine Menge, die alle Objekte enthält.*

Beweis Wir zeigen die Behauptung durch Widerspruch. Angenommen, X ist eine Menge, die alle Objekte enthält. Da X ein Objekt ist, gilt $X \in X$. Daraus folgt aber, dass $X, X, X, \dots$ eine unendliche Folge ist, die nach dem Wohlfundiertheitsaxiom nicht existieren kann. Widerspruch. □

Das Ende eines Beweises markieren wir immer mit dem Symbol □.

2.3 Begriffe und Notationen für Mengen

Die **Inklusionsbeziehung** zwischen zwei Mengen X und Y ist wie folgt definiert:

$$X \subseteq Y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall x \in X \colon x \in Y$$

Wenn $X \subseteq Y$ gilt, sagt man, dass X eine **Teilmenge** von Y ist, und dass Y eine **Obermenge** von X ist. Zwischen Gleichheit und Inklusion von zwei Mengen X und Y besteht ein direkter Zusammenhang:

$$X = Y \quad \iff \quad X \subseteq Y \ \wedge \ Y \subseteq X$$

Die **strikte Inklusionsbeziehung** zwischen zwei Mengen X und Y ist wie folgt definiert:

$$X \subsetneq Y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad X \subseteq Y \ \wedge \ X \neq Y$$

Wenn $X \subsetneq Y$ gilt, sagt man, dass X eine **echte Teilmenge** von Y ist, und dass Y eine **echte Obermenge** von X ist.

Zwei Mengen heißen **disjunkt**, wenn sie kein gemeinsames Element haben.

Wir benutzen die folgende Notation (sprich „x ist kein Element von X"):

$$x \notin X \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \neg(x \in X)$$

Wir vereinbaren die folgenden Bezeichnungen für oft vorkommende Teilmengen der reellen Zahlen:

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{B} & \overset{\text{def}}{=} & \{0, 1\} \\
\mathbb{N} & \overset{\text{def}}{=} & \{0, 1, 2, \dots\} \\
\mathbb{N}^+ & \overset{\text{def}}{=} & \{1, 2, 3, \dots\} \\
\mathbb{N}_n^+ & \overset{\text{def}}{=} & \{1, 2, 3, \dots, n\} \\
\mathbb{Z} & \overset{\text{def}}{=} & \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \\
\mathbb{R} & \overset{\text{def}}{=} & \{x \mid x \text{ reelle Zahl}\} \\
\mathbb{R}^+ & \overset{\text{def}}{=} & \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\\
\textbf{Natürliche Zahlen} \\
\textbf{Positive natürliche Zahlen} \\
(n \geq 1) \\
\textbf{Ganze Zahlen} \\
\textbf{Reelle Zahlen} \\
\textbf{Positive reelle Zahlen}
\end{array}$$

Es gilt $\mathbb{N}_n^+ \subsetneq \mathbb{N}^+ \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$.

Mit der Notation

$$\{x \mid A\}$$

bezeichnen wir die Menge aller Objekte x, die die Eigenschaft A haben. Dabei spielt x die Rolle einer Variablen. Die Definition von $\mathbb{R}$ ist ein Beispiel für den Gebrauch dieser Notation.

Sei X eine Menge. Mit der Notation

$$\{x \in X \mid A\}$$

bezeichnen wir die Teilmenge von X, die aus allen Objekten $x \in X$ besteht, die die Eigenschaft A haben. Dabei spielt x die Rolle einer Variablen. Die Definition von $\mathbb{R}^+$ ist ein Beispiel für den Gebrauch dieser Notation.

Seien X und Y zwei Mengen. Der **Schnitt**, die **Vereinigung** und die **Differenz** von X und Y sind die wie folgt definierten Mengen:

$$\begin{array}{lll}
X \cap Y & \overset{\text{def}}{=} & \{z \mid z \in X \ \wedge \ z \in Y\} \\
X \cup Y & \overset{\text{def}}{=} & \{z \mid z \in X \ \vee \ z \in Y\} \\
X - Y & \overset{\text{def}}{=} & \{z \mid z \in X \ \wedge \ z \notin Y\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\textbf{Schnitt} \\
\textbf{Vereinigung} \\
\textbf{Differenz}
\end{array}$$

Die **Potenzmenge**

$$\mathcal{P}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, Y \mid Y \subseteq X \,\}$$

einer Menge X ist die Menge aller Teilmengen von X. Mit

$$\mathcal{P}_{fin}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, Y \mid Y \subseteq X \;\wedge\; Y \text{ endlich} \,\}$$

bezeichnen wir die Menge aller endlichen Teilmengen der Menge X. Hier ist ein Beispiel für eine Potenzmenge:

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}\}$$

Sei X eine Menge. Ein **Tupel über** X ist ein Tupel, sodass jede Konstituente des Tupels ein Element von X ist. Mit

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\, t \mid t \text{ Tupel über } X \,\}$$

bezeichnen wir die Menge aller Tupel über X. Es gilt $\emptyset^* = \{\langle\rangle\}$.

Das **Produkt** von $n \geq 2$ Mengen $X_1, \dots, X_n$ ist die Menge

$$X_1 \times \cdots \times X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n \,\}$$

aller n-stelligen Tupel, deren i-te Komponente jeweils aus X_i ist. Für ein Produkt $X \times \cdots \times X$ schreibt man kürzer X^n, wobei $n \geq 2$ die Anzahl der Faktoren angibt. Hier ist ein Beispiel für ein Produkt:

$$\{1,2\} \times \{3,4\} = \{\langle 1,3\rangle,\ \langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle,\ \langle 2,4\rangle\}$$

Beachten Sie, dass es sich bei $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ um verschiedene Mengen handelt: Während die erste Menge nur Tripel enthält, enthält die zweite Menge nur Paare.

Die **Summe** von $n \geq 2$ Mengen $X_1, \dots, X_n$ ist die Menge

$$X_1 \uplus \cdots \uplus X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \langle i, x \rangle \mid i \in \{1, \dots, n\} \;\wedge\; x \in X_i \,\}$$

Die Elemente einer Summe sind Paare $\langle i, x \rangle$, die aus einer so genannten **Variantennummer** i und einem Element x aus dem entsprechenden **Summanden** X_i bestehen. Statt von Summen spricht man auch von **disjunkten Vereinigungen**. Hier ist ein Beispiel für eine Summe:

$$\{3,4\} \uplus \{5,6\} = \{\langle 1,3\rangle,\ \langle 1,4\rangle,\ \langle 2,5\rangle,\ \langle 2,6\rangle\}$$

2.4 Gerichtete Graphen

Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar (V, E), das aus einer Menge V und einer Menge $E \subseteq V \times V$ besteht.

Diese Definition wählt aus der Klasse der mathematischen Objekte diejenigen aus, die wir als gerichtete Graphen bezeichnen wollen. Im technischen Sinne wissen Sie jetzt genau, was ein gerichteter Graph ist. Aber warum sind gerichtete Graphen von Interesse? Haben Sie bitte noch etwas Geduld.

Konvention Da wir in diesem Buch nur gerichtete Graphen betrachten, werden wir sie der Kürze halber im Folgenden einfach als Graphen bezeichnen.

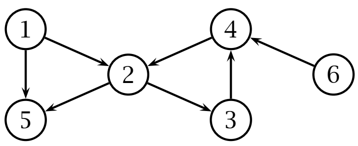
Zunächst führen wir drei *Sprechweisen* für Graphen ein. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann bezeichnen wir die Elemente von V als die **Knoten** von G, und die Elemente von E als die **Kanten** von G. Für eine Kante (v, w) sagen wir, dass sie **von v nach w führt**. Wir merken noch an, dass man Knoten im Englischen als vertices oder nodes bezeichnet, und Kanten als edges oder links.

Als Beispiel betrachten wir den Graphen $G = (V, E)$ mit

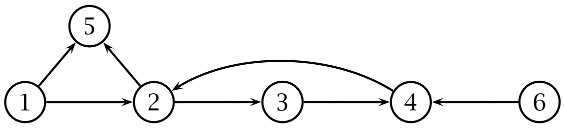
$$\begin{aligned} V &= \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \\ E &= \{(1,2),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,2),\ (6,4)\} \end{aligned}$$

Dieser Graph hat 6 Knoten und 5 Kanten.

Graphen können grafisch dargestellt werden, indem man die Knoten als Kreise und die Kanten als Pfeile zeichnet. Eine Kante (v, w) wird dabei als ein Pfeil gezeichnet, der von v nach w führt. Unseren Beispielgraphen können wir wie folgt darstellen:



Bei der graphischen Darstellung eines Graphen kann man die Positionen der Knoten frei wählen. Man spricht vom *Layout* eines Graphen. Unseren Beispielgraphen können wir auch mit dem folgenden Layout darstellen:



Graphen tauchen bei der Analyse vieler praktischer Situationen auf. Stellen Sie sich beispielsweise die Flugverbindungen einer Fluglinie vor. Wir bekommen einen Graphen, wenn wir Flughäfen als Knoten und Nonstopflüge als Kanten modellieren.

Es ist oft hilfreich, sich einen Graphen als ein Spielfeld vorstellen (denken Sie an das Spiel „Mensch Ärgere Dich nicht"), auf dem Spielfiguren entlang der Kanten bewegt werden können (nur in Richtung der Kanten). Diese Sichtweise eines Graphen bezeichnen wir als **Spielsicht**.

Graphen tauchen in der Informatik in sehr vielen Zusammenhängen auf. Aus der Sicht der grafischen Darstellung ist die formale Definition der Klasse der Graphen (d. h. $G = (V, E)$) verblüffend einfach. Sie klärt vollständig, was unter einem Graphen zu verstehen ist. Machen Sie sich klar, dass eine alternative Definition von Graphen mithilfe von Bildern und suggestiver Prosa keine Chance hat, einen vergleichbaren Grad an Präzision zu erreichen.

Wir führen jetzt die wichtigsten Sprechweisen für Graphen an. Machen Sie sich für jede Sprechweise klar, wie sie mathematisch definiert ist und was sie anschaulich bedeutet.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Wir vereinbaren die folgenden Sprechweisen:

- Ein Knoten w heißt **Nachfolger** eines Knotens v, wenn $(v, w) \in E$.
- Ein Knoten v heißt **Vorgänger** eines Knotens w, wenn $(v, w) \in E$.
- Zwei Knoten v und w heißen **benachbart** oder **adjazent**, wenn $(v, w) \in E$ oder $(w, v) \in E$.
- Ein **Pfad** ist ein nichtleeres Tupel $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, sodass für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Dabei heißt $n - 1$ die **Länge**, v_1 der **Ausgangspunkt** und v_n der **Endpunkt** des Pfades. Wir sagen auch, dass der Pfad **von** v_1 **nach** v_n **führt**. Aus der Spielsicht betrachtet ist ein Pfad eine mögliche Zugfolge für eine Figur.
- Ein Pfad heißt **einfach**, wenn er keinen Knoten mehrfach enthält.
- Ein Pfad $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ heißt **Zyklus**, wenn $n \geq 2$, $v_1 = v_n$ und $\langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ einfach ist.
- Ein Knoten w ist von einem Knoten v aus **erreichbar**, wenn ein Pfad von v nach w existiert.
- Ein Knoten heißt **Wurzel**, wenn von ihm aus alle Knoten erreichbar sind.
- Ein Knoten heißt **Quelle** oder **initial**, wenn er keinen Vorgänger hat.
- Ein Knoten heißt **Senke** oder **terminal**, wenn er keinen Nachfolger hat.

Für unseren Beispielgraphen gilt:

- Der Graph hat die die Senke 5 und die Quellen 1 und 6. Er hat keine Wurzel.
- Vom Knoten 2 aus sind die Knoten 2, 5, 3 und 4 erreichbar.

- Vom Knoten 1 aus sind alle Knoten bis auf 6 erreichbar.
- Der Pfad $\langle 2, 3, 4, 2\rangle$ ist ein Zyklus.

Ein Graphen heißt

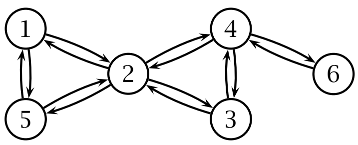
- **endlich**, wenn er nur endlich viele Knoten hat.
- **symmetrisch**, wenn er für jede Kante (v, w) auch eine Kante (w, v) hat.
- **gewurzelt**, wenn er eine Wurzel hat.
- **zyklisch**, wenn er einen Zyklus enthält.
- **azyklisch**, wenn er keinen enthält.

Unser Beispielgraph ist zyklisch und endlich und weder gewurzelt noch symmetrisch.

Die **Größe** eines endlichen Graphen ist die Anzahl seiner Knoten. Die **Tiefe** eines endlichen Graphen mit mindestens einem Knoten ist die maximale Länge seiner einfachen Pfade. Unser Beispielgraph hat die Größe 6 und die Tiefe 3.

Aus der Spielsicht betrachtet sind endliche Graphen ohne Zyklen eher langweilig, da eine Figur bei solchen Graphen nach einigen Schritten immer auf einem terminalen Knoten landet, den sie nicht mehr verlassen kann. Dagegen erlauben unendliche Graphen sowie endliche Graphen mit Zyklen interessante Spiele, da sie den Figuren eine Chance geben, terminale Knoten zu vermeiden.

Der **symmetrische Abschluss** eines Graphen (V, E) ist der Graph $(V, E \cup E^{-1})$ mit $E^{-1} = \{ (v, w) \mid (w, v) \in E \}$. Der symmetrische Abschluss eines Graphen ist immer symmetrisch. Der symmetrische Abschluss unseres Beispielgraphen sieht so aus:

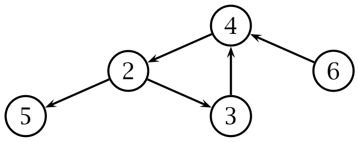


Er hat die Tiefe 5.

Ein Graph heißt **stark zusammenhängend**, wenn jeder seiner Knoten von jedem seiner Knoten aus erreichbar ist. Ein Graph heißt **zusammenhängend**,wenn sein symmetrischer Abschluss stark zusammenhängend ist. Unser Beispielgraph ist zusammenhängend, aber nicht stark zusammenhängend.

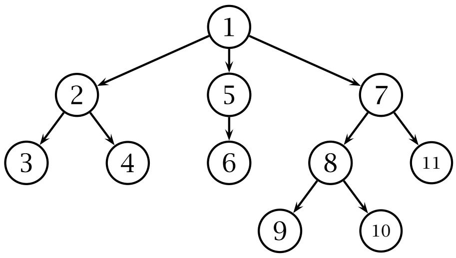
Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **Teilgraph** eines Graphen $G' = (V', E')$, wenn $V \subseteq V'$ und $E \subseteq E'$ gilt.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$. Der **von v aus erreichbare Teilgraph** von G besteht aus allen Knoten, die von v aus erreichbar sind, und aus allen Kanten zwischen diesen Knoten. Der vom Knoten 6 aus erreichbare Teilgraph unseres Beispielgraphen sieht wie folgt aus:

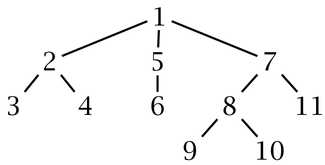


Proposition 2.4.1 *Sei G ein Graph mit einem Knoten v. Dann ist der von v aus erreichbare Teilgraph von G zusammenhängend.*

Ein Graph heißt **baumartig**, wenn er gewurzelt ist und jeder seiner Knoten höchstens einen Vorgänger hat.[2] Hier ist ein Beispiel für einen baumartigen Graphen:



Ein baumartiger Graph hat immer genau eine Quelle, die gleichzeitig auch die eindeutig bestimmte Wurzel des Graphen ist. Baumartige Graphen haben die charakteristische Eigenschaft, dass es von der Wurzel zu einem Knoten immer genau einen Pfad gibt. Die Senken eines baumartigen Graphen werden als **Blätter** bezeichnet. Baumartige Graphen stellt man meist wie oben mit nach unten gerichteten Kanten dar. Die Wurzel erscheint dann ganz oben und die Blätter erscheinen unten. Da bei dieser Darstellung die Kanten immer nach unten zeigen, kann man die Pfeilspitzen weglassen. Oft lässt man auch die Kreise weg. Für unseren Beispielgraphen bekommt man dann die folgende Darstellung:



Die mathematische Beschreibung dieses Graphen ist wie folgt:

$$V = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$$
$$E = \{(1,2),\ (1,5),\ (1,7),\ (2,3),\ (2,4),\ (5,6),\ (7,8),\ (7,11),\ (8,9),\ (8,10)\}$$

Proposition 2.4.2 *Sei v ein Knoten eines baumartigen Graphen. Dann ist der von v aus erreichbare Teilgraph ein baumartiger Graph mit der Wurzel v.*

[2] Baumartige Graphen werden meistens einfach als *Bäume* bezeichnet. Wir vermeiden diese Sprechweise, da wir den Begriff Baum für eine alternative Formalisierung von Bäumen reservieren wollen, die wir später einführen werden.

2.5 Binäre Relationen

Eine **binäre Relation** ist eine Menge R, sodass jedes Element von R ein Paar ist.

Diese Definition wählt aus der Klasse der mathematischen Objekte diejenigen aus, die wir als binäre Relationen bezeichnen wollen. Die Auszeichnung von binären Relationen ist sinnvoll, da sie in der mathematischen Praxis besonders häufig vorkommen.

Konvention Da wir in diesem Buch nur binäre Relationen betrachten, werden wir sie der Kürze halber im Folgenden einfach als Relationen bezeichnen.[3]

Beachten Sie, dass auch die leere Menge eine binäre Relation ist.

Sei R eine Relation. Wir definieren drei Notationen:

$$\begin{aligned} \mathit{Dom}\,R &\overset{\text{def}}{=} \{\, x \mid \exists y\colon (x,y) \in R \,\} && \textbf{Definitionsbereich} \\ \mathit{Ran}\,R &\overset{\text{def}}{=} \{\, y \mid \exists x\colon (x,y) \in R \,\} && \textbf{Bildbereich} \\ \mathit{Ver}\,R &\overset{\text{def}}{=} \mathit{Dom}\,R \cup \mathit{Ran}\,R && \textbf{Knotenmenge} \end{aligned}$$

Wenn $x \in \mathit{Dom}\ R$ ist, sagen wir, dass R **auf** x **definiert** ist. Die Elemente von $\mathit{Ver}\,R$ bezeichnen wir als die **Knoten von** R, und die Elemente von R als die **Kanten von** R. Die Kürzel Dom und Ran sind aus den englischen Wörtern für Definitionsbereich und Bildbereich abgeleitet: domain und range.

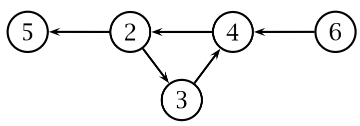
Unter einer **Relation auf einer Menge** X verstehen wir eine Relation R mit $\mathit{Ver}\,R \subseteq X$. Die Relationen auf einer Menge X sind genau die Teilmengen von $X \times X$.

Sei R eine Relation. Dann ist $(\mathit{Ver}\,R,\ R)$ ein Graph, der als **Graph von** R bezeichnet wird. Wir können also jede Relation als einen Graph auffassen. Damit übertragen sich alle Begriffe, die wir für Graphen definiert haben, auf Relationen. Wir sprechen von der **Graphsicht** einer Relation.

Als Beispiel betrachten wir die Relation

$$R \;=\; \{(2,3),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,2),\ (6,4)\}$$

Die **Graphdarstellung** dieser Relation sieht wie folgt aus:



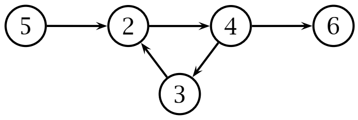
Der Definitionsbereich von R ist die Menge $\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, und der Bildbereich von R ist $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

[3] Der Name *binäre Relation* legt nahe, dass es auch andere Relationen gibt. Unter einer *n-stelligen Relation* versteht man eine Menge R, sodass jedes Element von R ein n-stelliges Tupel ist ($n \geq 2$). Bei binären Relationen handelt es sich also um zweistellige Relationen.

Die **Umkehrrelation** R^{-1} einer Relation R ist die wie folgt definierte Relation:

$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x,y) \mid (y,x) \in R \}$$

Die Umkehrrelation erhält man also, indem man alle Kanten umdreht. Hier ist die Graphdarstellung der Umkehrrelation unserer Beispielrelation:



Statt Umkehrrelation sagt man auch **inverse Relation**. Offensichtlich gilt $(R^{-1})^{-1} = R$, $Dom\,(R^{-1}) = Ran\,R$ und $Ver\,(R^{-1}) = Ver\,R$.

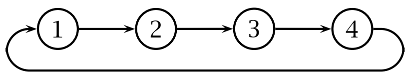
Eine Relation R heißt **funktional**, wenn zu jedem $x \in Dom\,R$ genau ein $y \in Ran\,R$ existiert mit $(x,y) \in R$, und **injektiv**, wenn zu jedem $y \in Ran\,R$ genau ein $x \in Dom\,R$ existiert mit $(x,y) \in R$. Eine Relation ist also genau dann funktional, wenn von keinem Knoten mehr als eine Kante ausgeht, und injektiv genau dann, wenn auf keinen Knoten mehr als eine Kante zeigt. Funktionalität und Injektivität sind symmetrische Begriffe: Eine Relation ist genau dann funktional, wenn ihre Umkehrrelation injektiv ist.

Eine Relation R heißt **bijektiv**, wenn sie funktional und injektiv ist.

Unsere Beispielrelation ist weder funktional noch injektiv.

Sei R eine Relation und X eine Menge. Dann heißt R **total auf** X, wenn $X \subseteq Dom\,f$, und **surjektiv auf** X, wenn $X \subseteq Ran\,f$. Eine Relation ist genau dann total auf X, wenn von jedem Element von X eine Kante abgeht, und surjektiv auf X genau dann, wenn auf jedes Element von X eine Kante zeigt. Totalität und Surjektivität sind symmetrische Begriffe: Eine Relation ist genau dann surjektiv auf X, wenn ihre Umkehrrelation total auf X ist. Jede Relation R ist total auf $Dom\,R$ und surjektiv auf $Ran\,R$.

Hier ist die Graphdarstellung einer bijektiven Relation, die total und surjektiv auf $\{1,2,3,4\}$ ist:

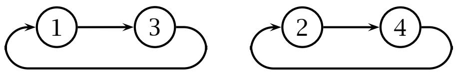


Komposition von Relationen

Die **Komposition** $R \circ R'$ zweier Relationen R und R' ist die wie folgt definierte Relation:

$$R \circ R' \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x,z) \mid \exists (x,y) \in R\colon\ (y,z) \in R' \}$$

Die Komposition $R \circ R'$ zweier Relationen R und R' enthält eine Kante (x,z) also genau dann, wenn es einen gemeinsamen Knoten y gibt, so dass (x,y) eine Kante von R und (y,z) eine Kante von R' ist. Die Komposition unserer bijektiven Beispielrelation mit sich selbst ergibt die folgende Relation:



Diese Relation ist wieder bijektiv.

Proposition 2.5.1 *Seien R, R' und R'' Relationen. Dann gilt:*

1. $R \circ (R' \circ R'') = (R \circ R') \circ R''$.
2. $(R \circ R')^{-1} = R'^{-1} \circ R^{-1}$.
3. *Wenn R und R' funktional sind, dann ist $R \circ R'$ funktional.*
4. *Wenn R und R' injektiv sind, dann ist $R \circ R'$ injektiv.*

Sei X eine Menge. Die **Identität auf** X ist die wie folgt definierte Relation:

$$Id(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, x) \mid x \in X \}$$

Offensichtlich gilt $Id(X) = Id(X)^{-1} = Id(X) \circ Id(X)$. Außerdem ist $Id(X)$ bijektiv sowie total und surjektiv auf X.

Proposition 2.5.2 *Sei R eine Relation. Dann gilt:*

1. *R ist genau dann funktional, wenn $R^{-1} \circ R = Id(Ran\, R)$.*
2. *R ist genau dann injektiv, wenn $R \circ R^{-1} = Id(Dom\, R)$.*

2.6 Funktionen

Eine **Funktion** ist eine funktionale Relation. [4]

Wir haben bereits mehrere Beispiele für endliche Funktionen gesehen. Hier ist ein weiteres:

$$f = \{(1, 2),\ (3, 4),\ (5, 6),\ (7, 8)\}$$

Diese Funktion ist injektiv und hat die Graphdarstellung

[4] Wahrscheinlich haben Sie sich unter einer Funktion bisher etwas völlig anderes vorgestellt. Verzichten Sie vorerst darauf, ihren Vorstellung von Funktion mit den hier definierten Begriff in Zusammenhang zu bringen. Nehmen Sie stattdessen an, dass es zwei Arten von Funktionen gibt: die, die Sie bisher kannten und die, die wir hier definiert haben. Wenn wir in diesem Buch Funktion sagen, werden wir immer Funktionen meinen so wie wir sie gerade definiert haben.

Wir können eine Funktion als eine *Zuordnung* auffassen, die jedem Element ihres Definitionsbereichs genau ein Element ihres Bildbereichs zuordnet. Wenn eine Funktion f das Paar (x, y) enthält, sagen wir, dass

- f das Objekt x auf das Objekt y **abbildet**.
- f für das **Argument** x das **Ergebnis** y **liefert**.
- y der **Wert von** f **für** x ist.
- y das **Bild von** x **unter** f ist.
- x ein **Urbild von** y **unter** f ist.

Wir sprechen von der **Zuordnungssicht** einer Funktion. Bilder (Zuordnungssicht) sind dasselbe wie Nachfolger (Graphsicht), und Urbilder sind dasselbe wie Vorgänger.

Seien X und Y Mengen. Wir definieren die folgenden Notationen:

$$\begin{aligned}
X \rightharpoonup Y &\overset{\text{def}}{=} \{ f \mid f \text{ Funktion mit } \mathit{Dom}\, f \subseteq X \text{ und } \mathit{Ran}\, f \subseteq Y \} \\
X \to Y &\overset{\text{def}}{=} \{ f \mid f \text{ Funktion mit } \mathit{Dom}\, f = X \text{ und } \mathit{Ran}\, f \subseteq Y \} \\
X \overset{\mathit{fin}}{\rightharpoonup} Y &\overset{\text{def}}{=} \{ f \mid f \text{ endliche Funktion mit } \mathit{Dom}\, f \subseteq X \text{ und } \mathit{Ran}\, f \subseteq Y \}
\end{aligned}$$

Die Elemente von $X \rightharpoonup Y$ bezeichnet wir als **Funktionen von** X **nach** Y. Die Elemente von $X \to Y$ bezeichnet wir als **totale Funktionen** von X nach Y. Die Elemente von $X \overset{\mathit{fin}}{\rightharpoonup} Y$ bezeichnet wir als **endliche Funktionen** von X nach Y. Statt $f \in X \to Y$ schreiben wir auch $f\colon X \to Y$ oder „f Funktion $X \to Y$“. Entsprechend schreiben wir für $f \in X \to Y$ auch $f\colon X \rightharpoonup Y$ oder „f Funktion $X \rightharpoonup Y$“. Hier sind zwei Beispiele:

$$\begin{aligned}
\mathbb{B} \to \mathbb{B} = \{ &\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\},\ \ \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}, \\
&\{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\},\ \ \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\} \}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{B} \rightharpoonup \mathbb{B} = (\mathbb{B} \to \mathbb{B}) \cup \{ \emptyset,\ \ \{\langle 0,0\rangle\},\ \ \{\langle 0,1\rangle\},\ \ \{\langle 1,0\rangle\},\ \ \{\langle 1,1\rangle\} \}$$

Wenn f eine Funktion ist und $x \in \mathit{Dom}\, f$, dann bezeichnen wir das Bild von x unter f mit fx. Die meisten Mathematiker schreiben fx mit Klammern als $f(x)$. Wir lassen diese unnötigen Klammern meistens weg.

Proposition 2.6.1 *Sei $f \in X \to Y$ und $g \in Y \to Z$. Dann ist $f \circ g \in X \to Z$ und*

$$\forall x \in X\colon\ (f \circ g)x = g(fx)$$

Proposition 2.6.2 *Sei f eine injektive Funktion. Dann gilt:*

1. *f^{-1} ist eine injektive Funktion.*
2. $\forall x, y \in \mathit{Dom}\, f\colon\ fx = fy \iff x = y.$
3. $\forall x \in \mathit{Dom}\, f\colon\ f^{-1}(fx) = x.$
4. $\forall y \in \mathit{Ran}\, f\colon\ f(f^{-1}y) = y.$

Da die Umkehrrelation f^{-1} einer injektiven Funktion f eine Funktion ist, bezeichnen wir sie als **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion**.

Unendliche Funktionen beschreiben wir meistens mit der so genannten **Lambda-Notation**:

$$\begin{aligned}
\lambda\, n \in \mathbb{N}\,.\, n &= \{\,(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\,\} \;=\; \mathit{Id}(\mathbb{N}) \\
&= \{(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ \ldots\} \\
\lambda\, x \in \mathbb{N}\,.\, x^2 &= \{\,(x,x^2) \mid x \in \mathbb{N}\,\} \\
&= \{(0,0),\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9),\ \ldots\} \\
\lambda\, (x,y) \in \mathbb{N}^2\,.\, x+y &= \{\,((x,y),\, x+y) \mid x \in \mathbb{N} \land y \in \mathbb{N}\,\} \\
&= \{((0,0),\, 0),\ ((0,1),\, 1),\ ((1,0),\, 1), \\
&\qquad ((1,1),\, 2),\ ((0,2),\, 2),\ ((2,0),\, 2),\ \ldots\}
\end{aligned}$$

Hier ist ein weiteres Beispiel, das zusätzlich eine Konditional-Notation benutzt:

$$\lambda\, x \in \mathbb{Z}\,.\, (\text{if } x \geq 0 \text{ then } x \text{ else } -x) \;=\; \{\,(x, |x|) \mid x \in \mathbb{Z}\,\}$$

Man kann eine Funktion auch zusammen mit einem Namen beschreiben. Beispielsweise beschreibt

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ mit } \ fx = 3x$$

die Funktion $\lambda\, x \in \mathbb{R}\,.\, 3x$.

Es gibt also viele verschiedene Möglichkeiten, ein und dieselbe Funktion zu beschreiben. Es ist sehr wichtig, zwischen einer Funktion und ihren Beschreibungen zu unterscheiden. Der Begriff der Funktion ist sehr einfach. Dagegen ist der Umgang mit den verschiedenen Notationen für Funktionen schwieriger und bedarf der Übung.

Wir werden die folgenden **Klammersparregeln** verwenden:

$$\begin{aligned}
X \times Y \to Z \quad &\rightsquigarrow \quad (X \times Y) \to Z \\
X \to Y \to Z \quad &\rightsquigarrow \quad X \to (Y \to Z) \\
fxy \quad &\rightsquigarrow \quad (fx)y \\
\lambda\, x \in X\,.\, \lambda\, y \in Y\,.\, M \quad &\rightsquigarrow \quad \lambda\, x \in X\,.\, (\lambda\, y \in Y\,.\, M)
\end{aligned}$$

Unendliche Folgen
Sei X eine Menge. Eine **unendliche Folge über** X ist eine Funktion $f \in \mathbb{N} \to X$. Anschaulich können wir eine unendliche Folge f durch Aufzählen der ersten Elemente darstellen:

$$f0,\ f1,\ f2,\ f3,\ \dots$$

Als Beispiel betrachten wir die Folge $\lambda n \in \mathbb{N}.\, 2n + 1$ der ungeraden natürlichen Zahlen:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \dots$$

Adjunktion
Die im letzten Kapitel betrachteten Umgebungen können wir als endliche Funktionen modellieren, die Bezeichner auf Werte abbilden. Die Adjunktionsoperation für Umgebungen (siehe Abschnitt 1.16) lässt sich auf beliebige Funktionen übertragen.

Die **Adjunktion** zweier Funktionen f und g ist wie folgt definiert:

$$f + g \overset{\text{def}}{=} \lambda x \in \mathit{Dom}\, f \cup \mathit{Dom}\, g .\ \text{if } x \in \mathit{Dom}\, g \text{ then } gx \text{ else } fx$$

Die Funktion $f + g$ verhält sich für alle Werte, auf denen g definiert ist, wie g. Für alle anderen Werte verhält sich $f + g$ wie f. Für jede Funktion f gilt $f + f = f$. Statt $f + \{(x, y)\}$ schreiben wir auch

$f[x := y]$ (lies „f mit x nach y")

Hier sind Beispiele:

$$\begin{aligned}
\{(1,5),\ (2,6)\} + \{(2,7),\ (3,8)\} &= \{(1,5),\ (2,7),\ (3,8)\} \\
\{(1,5),\ (2,7),\ (3,8)\}[2 := 0] &= \{(1,5),\ (2,0),\ (3,8)\} \\
(\lambda x \in \mathbb{N}.\, 0) + \{(1,1),\ (2,2)\} &= (\lambda x \in \mathbb{N}.\ \text{if } x < 3 \text{ then } x \text{ else } 0)
\end{aligned}$$

Kartesische und kaskadierte Darstellung mehrstelliger Operationen
Die Additionsoperation für ganze Zahlen können wir durch die Funktion

$$f = (\lambda (x, y) \in \mathbb{Z}^2 .\, x + y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

darstellen, die zu einem Paar $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ die Zahl $x + y$ liefert. Alternativ können wir die Additionsoperation auch durch die Funktion

$$g = (\lambda x \in \mathbb{Z} .\, \lambda y \in \mathbb{Z} .\, x + y) \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

darstellen, die für $x \in \mathbb{Z}$ die Funktion $\lambda\, y \in \mathbb{Z}\,.\; x+y$ liefert. Beispielsweise liefert g für 7 die Funktion $\lambda\, y \in \mathbb{Z}\,.\; 7 + y$. Allgemein gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}\colon\; f(x, y) = x + y = (\lambda\, y \in \mathbb{Z}\,.\; x + y)y = gxy$$

Wir bezeichnen f als die **kartesische** und g als die **kaskadierte Darstellung** der Additionsoperation. Standard ML unterstützt neben der kartesische Darstellung auch die kaskadierte Darstellung von mehrstelligen Operationen.

Abbildungen
Viele Mathematikbücher verwenden anstelle des Begriffs der Funktion den Begriff der Abbildung. Eine **Abbildung** ist ein Tripel (X, f, Y), das aus zwei Mengen X und Y sowie einer totalen Funktion von X nach Y besteht. Dabei wird X als der Definitionsbereich, f als der **Graph** und Y als der **Wertebereich** der Abbildung bezeichnet. Abbildungen werden meistens mithilfe eines Namens beschrieben. Beispielsweise beschreibt

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ &f(x) = |x| \end{aligned}$$

die Abbildung $\langle \mathbb{Z},\ (\lambda\, x \in \mathbb{Z}\,.\; |x|),\ \mathbb{Z}\rangle$. Beachten Sie, dass es sich bei $\langle \mathbb{Z},\ (\lambda\, x \in \mathbb{Z}\,.\; |x|),\ \mathbb{Z}\rangle$ und $\langle \mathbb{Z},\ (\lambda\, x \in \mathbb{Z}\,.\; |x|),\ \mathbb{N}\rangle$ um zwei verschiedene Abbildungen handelt, da sie verschiedene Wertebereiche haben. Eine Abbildung (X, f, Y) heißt **injektiv**, wenn f injektiv ist, **surjektiv**, wenn f auf Y surjektiv ist, und **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv sind.

2.7 Notationen für Zahlen

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt $x \in X$

- das **Minimum** von X genau dann, wenn $\forall y \in X\colon\; x \le y$.
- das **Maximum** von X genau dann, wenn $\forall y \in X\colon\; y \le x$.

Das Minimum von X bezeichnen wir mit $\min X$, wenn es existiert. Entsprechend bezeichnen wir das Maximum mit $\max X$, wenn es existiert.

Die Rundungsfunktionen **Floor** $\lfloor \_ \rfloor$ und **Ceiling** $\lceil \_ \rceil$ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} &\lfloor \_ \rfloor \in \mathbb{R} \to \mathbb{Z} && \lceil \_ \rceil \in \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ &\lfloor x \rfloor = \max\{\, z \in \mathbb{Z} \mid z \le x \,\} && \lceil x \rceil = \min\{\, z \in \mathbb{Z} \mid x \le z \,\} \end{aligned}$$

Die **Modulo-Funktion** ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathrm{mod} &\in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \to \mathbb{Z} \\ x \,\mathrm{mod}\, y &= x - \lfloor x/y \rfloor\, y \end{aligned}$$

Für $y > 0$ gilt: $(x \bmod y) < y$.

Die Standard ML Operation $(x$ `div` $y)$ heißt **ganzzahlige Division** und berechnet $\lfloor x/y \rfloor$ (für $x, y \in \mathbb{Z}$ und $y \neq 0$). Die Operation $(x$ `mod` $y)$ berechnet die Modulo-Funktion.

2.8 Terminierende Relationen

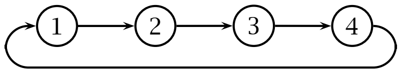
Wir haben bereits erwähnt, dass man Graphen als Spielfelder auffassen kann, auf denen Spielfiguren entlang der Kanten bewegt werden können. Diese Sichtweise überträgt sich auf Relationen, da diese als Graphen aufgefasst werden können. Unter einer *terminierenden Relation* verstehen wir eine Relation, die keine unendlichen Zugfolgen zulässt. Wir interessieren uns für terminierende Relationen, weil wir mit ihnen das Terminierungsverhalten von rekursiven Prozeduren modellieren können (siehe Kapitel 6).

Zuerst definieren wir formal, was wir unter einer terminierenden Relation verstehen wollen.

Sei R eine Relation. Ein **unendlicher Pfad in** R ist eine unendliche Folge p über $Ver\,R$, sodass $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ (pn, p(n+1)) \in R$. Der **Ausgangspunkt** eines unendlichen Pfades p ist $p0$.

Wir sagen, dass eine Relation R für ein Objekt x **terminiert**, wenn es keinen von x ausgehenden unendlichen Pfad in R gibt. Weiter sagen wir, dass eine Relation **terminiert**, wenn sie für jeden ihrer Knoten terminiert.

Unser erstes Beispiel ist die endliche Relation



Diese Relation terminiert für keinen ihrer Knoten. Von jedem ihrer Knoten geht genau ein unendliche Pfad aus. Der vom Knoten 1 ausgehende unendliche Pfad ist $\lambda n \in \mathbb{N}.\, 1 + (n \bmod 4)$.

Als zweites Beispiel betrachten wir die unendliche Relation

$$R = \{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n \}$$

Diese Relation ist azyklisch. Trotzdem terminiert diese Relation für keinen ihrer Knoten, da $\lambda n \in \mathbb{N}.\, n+k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ein von k ausgehender unendlicher Pfad ist. Dagegen terminiert die Umkehrrelation R^{-1} für jeden ihrer Knoten.

Proposition 2.8.1 *Jede Teilmenge einer terminierenden Relation ist eine terminierende Relation.*

Proposition 2.8.2 *Sei R eine endliche Relation. Dann terminiert R genau dann, wenn R azyklisch ist.*

Seien R und R' Relationen. Wir sagen, dass eine Funktion

$$Ver\,R \to Ver\,R'$$

R **in** R' **einbettet**, wenn gilt: $\forall (x,y) \in R\colon\ (fx, fy) \in R'$. Wenn es eine Funktion gibt, die R in R' einbettet, sagen wir, dass R in R' **einbettbar** ist.

Proposition 2.8.3 *Jede Relation, die in eine terminierende Relation einbettbar ist, terminiert.*

Beweis Angenommen, f bettet R in R' ein und R' terminiert. Wir zeigen durch Widerspruch, dass R terminiert. Angenommen, $p \in \mathbb{N} \to Ver\,R$ ist ein unendlichen Pfad in R. Da $f \in Ver\,R \to Ver\,R'$ die Relation R in R' einbettet, ist $p \circ f$ ein unendlicher Pfad in R'. Widerspruch, da R' terminiert. □

2.9 Ordnungen

Ordnungsbeziehungen spielen bei vielen Betrachtungen eine wichtige Rolle. Hier sind Beispiele für Ordnungsbeziehungen:

- Die Zahl 3 ist kleiner als die Zahl 7.
- Die Menge $\{1,2\}$ ist eine echte Teilmenge der Menge $\{1,2,3\}$.
- Das Tupel $\langle 3,5\rangle$ ist ein echtes Teilobjekt der Menge $\{\{1,2\},\ 7,\ \langle 3,5\rangle\}$.

Ordnungsbeziehungen werden mithilfe von speziellen Relationen beschrieben, die als *Ordnungen* bezeichnet werden. Bevor wir die Klasse der Ordnungen definieren, betrachten wir die wichtigsten konkreten Ordnungen.

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Die **natürliche Ordnung für** X ist die Relation

$$NO(X) \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \{\,(x,y) \in X^2 \mid x \le y\,\}$$

Sei X eine Menge. Die **Inklusionsordnung für** $\mathcal{P}(X)$ ist die Relation

$$IO(X) \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \{\,(Y,Z) \in \mathcal{P}(X)^2 \mid Y \subseteq Z\,\}$$

Sei X eine Menge. Die **strukturelle Ordnung für** X ist die Relation

$$SO(X) \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \{\,(x,y) \in X^2 \mid x \text{ Teilobjekt von } y\,\}$$

Sei R eine Relation. Wir vereinbaren die folgenden Notationen:

$$R^{\prec} \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \{\,(x,y) \in R \mid x \ne y\,\}$$
$$R^{\succ} \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \{\,(x,y) \in R^{-1} \mid x \ne y\,\}$$

Offensichtlich gilt $R^{\succ} = (R^{\prec})^{-1}$.

Wir definieren eine Reihe von Eigenschaften, die im Zusammenhangen mit Ordnungen eine Rolle spielen. Eine Relation R heißt

- **reflexiv**, wenn $Id(Ver\,X) \subseteq R$. Reflexivität auf X bedeutet, dass zu jedem Knoten x die Kante (x,x) existiert.
- **strikt**, wenn $R = R^{\prec}$. Striktheit bedeutet, zu keinem Knoten x die Kante (x,x) existiert.
- **symmetrisch**, wenn $R^{-1} \subseteq R$. Symmetrie bedeutet, dass (x,y) genau dann eine Kante ist, wenn (y,x) eine Kante ist.
- **antisymmetrisch**, wenn $R^{-1} \cap R \subseteq Id(Ver\,X)$. Antisymmetrie bedeutet, dass zwischen zwei verschiedenen Knoten höchstens eine Kante existiert.
- **transitiv**, wenn $R \circ R \subseteq R$. Transitivität bedeutet, dass zu zwei verschiedenen Knoten x und y eine Kante von x nach y existiert, wenn es einen Pfad von x nach y gibt.
- **linear**, wenn zwei verschiedene Knoten immer adjazent sind.
- **wohlfundiert**, wenn $R^{\succ}$ terminiert.

Mit diesen Eigenschaften können wir die wichtigsten Klassen von Ordnungen definieren. Eine Relation R heißt

- **partielle Ordnung für eine Menge** X, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist und $Ver\,R = X$ gilt.
- **lineare Ordnung für eine Menge** X, wenn sie eine partielle Ordnung für X ist und zudem linear ist.
- **wohlfundierte Ordnung für eine Menge** X, wenn sie eine partielle Ordnung für X ist und zudem wohlfundiert ist.
- **Wohlordnung für eine Menge** X, wenn sie eine wohlfundierte Ordnung für X ist und zudem linear ist.

Die oben eingeführten konkreten Ordnungen lassen sich mit diesen Begriffen wie folgt klassifizieren:

- Sei X eine Menge. Dann ist $IO(X)$ eine partielle Ordnung für $\mathcal{P}(X)$. Die Ordnung $IO(X)$ ist genau dann wohlfundiert, wenn X endlich ist. Wenn X mindestens zwei Elemente enthält, ist $IO(X)$ nicht linear.

- Sei X eine Menge. Dann ist $SO(X)$ eine wohlfundierte Ordnung für die Menge aller Teilobjiekte von X. Diese Eigenschaft wird durch das Wohlfundiertheitsaxiom gewährleistet.
- Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge von reellen Zahlen. Dann ist $NO(X)$ eine lineare Ordnung für X. Wenn $X \subseteq \mathbb{Z}$ eine nach unten beschränkte Menge von ganzen Zahlen ist (d. h. es gibt eine Zahl u mit $\forall x \in X\colon u \leq x$), dann ist $NO(X)$ eine Wohlordnung für X.

Proposition 2.9.1 *Sei R eine partielle [lineare] Ordnung für eine Menge X. Dann ist R^{-1} eine partielle [lineare] Ordnung für X.*

Proposition 2.9.2 *Sei R eine partielle Ordnung. Dann sind die Relationen $R^{\prec}$ und $R^{\succ}$ strikt, antisymmetrisch und transitiv.*

Sei R eine partielle Ordnung für X. Wir vereinbaren die folgenden Notationen und Sprechweisen:

$$x \preceq_R y \overset{\text{def}}{\iff} (x, y) \in R \qquad x \textbf{ kleiner-gleich } y \textbf{ in } R$$
$$x \succeq_R y \overset{\text{def}}{\iff} y \preceq_R x \qquad x \textbf{ größer-gleich } y \textbf{ in } R$$
$$x \prec_R y \overset{\text{def}}{\iff} x \preceq_R y \wedge x \neq y \qquad x \textbf{ kleiner } y \textbf{ in } R$$
$$x \succ_R y \overset{\text{def}}{\iff} y \prec_R x \qquad x \textbf{ größer } y \textbf{ in } R$$

Anschaulich gesprochen bedeutet Wohlfundiertheit für eine partielle Ordnung, dass ein Objekt nur endlich oft verkleinert werden kann.

Sei R eine partielle Ordnung für X. Zwei Elemente $x, y \in X$ heißen **vergleichbar in** R, wenn $x \preceq_R y$ oder $x \succeq_R y$ gilt. Eine partielle Ordnung R für X ist genau dann linear, wenn alle Elemente von X in R vergleichbar sind.

2.10 Isomorphie und Kardinalität

Seien X und Y zwei Mengen und sei f eine totale Funktion von X nach Y. Manchmal ist es hilfreich, sich die Elemente von X als *Beschreibungen* für die Elemente von Y vorzustellen, in dem Sinne, dass ein $x \in X$ ein $y \in Y$ *beschreibt*, wenn $fx = y$ gilt. Mit dieser Sicht ergeben sich zwei Sachverhalte:

- f ist genau dann surjektiv auf Y, wenn jedes Element von Y durch mindestens ein Element von X beschrieben werden kann.
- f ist genau dann injektiv, wenn jedes Element von Y durch höchstens ein Element von X beschrieben werden kann.

Als Beispiel betrachten wir die Beschreibung von Zeitdauern mit Stunden, Minuten und Sekunden (siehe Abschnitt 1.7):

$$X = \mathbb{N}^3, \quad Y = \mathbb{N}, \quad f = \lambda\,(h,m,s) \in X\,.\, 60(60h+m)+s$$

Da f surjektiv auf Y ist, kann jede Zeitdauer in Y durch ein Tripel in X beschrieben werden. Da f nicht injektiv ist, können bestimmte Zeitdauern (alle von mehr als 60 Sekunden) durch mehr als ein Tripel in X beschrieben werden. Wenn wir die zulässigen Tripel gemäß

$$X' = \mathbb{N} \times \{0,\dots,59\} \times \{0,\dots,59\}$$

einschränken, bekommen wir eine injektive Funktion

$$f' = \lambda\,(h,m,s) \in X'\,.\, 60(60h+m)+s$$

von X' nach Y, die immer noch surjektiv auf Y ist. Das bedeutet, dass jeder Zeitdauer in Y durch genau ein Tripel in X' beschrieben werden kann.

Seien X und Y Mengen. Eine **Bijektion** $X \to Y$ ist eine injektive Funktion $X \to Y$, die surjektiv auf Y ist.

Sei f eine Bijektion $X \to Y$. Zunächst stellen wir fest, dass die Umkehrfunktion f^{-1} eine Bijektion $Y \to X$ ist. Die dadurch bestehende symmetrische Situation können wir grafisch wie folgt darstellen:

$$X \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$$

Die Elemente von X und Y entsprechen sich eineindeutig: Zu jedem $x \in x$ existiert genau ein $y \in Y$, dass durch x beschrieben wird (nämlich fx), und zu jedem $y \in Y$ existiert genau ein $x \in X$, dass y beschreibt (nämlich $f^{-1}y$). Wir können also nicht nur die Elemente von X als Beschreibungen für die Elemente von Y auffassen, sondern auch umgekehrt die Elemente von Y als Beschreibungen für die Elemente von X.

Zwei Mengen X und Y heißen **isomorph**, wenn es eine Bijektion $X \to Y$ gibt. Wir vereinbaren die folgende Notation:

$$X \cong Y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad X \text{ und } Y \text{ sind isomorph}$$

Wir stellen fest, dass Isomorphie von Mengen eine reflexive, symmetrische und transitive Beziehung ist:[5]

- Für jede Menge X gilt $X \cong X$, da $Id(X)$ eine Bijektion $X \to X$ ist.

[5] In Analogie zu den entsprechenden Relationseigenschaften.

- Wenn $X \cong Y$, dann auch $Y \cong X$, da die Umkehrfunktion einer Bijektion $X \to Y$ eine Bijektion $Y \to X$ ist.
- Wenn $X \cong Y$ und $Y \cong Z$, dann auch $X \cong Z$, da die Komposition zweier Bijektionen $X \to Y$ und $Y \to Z$ eine Bijektion $X \to Z$ ist.

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge X heißt **Kardinalität** der Menge und wird mit $|X|$ bezeichnet. Beispielsweise gilt $|\emptyset| = 0$ und $|\{0, 1\}| = 2$.

Proposition 2.10.1 *Wenn zwei Mengen isomorph sind, dann sind sie entweder beide unendlich, oder sie sind beide endlich und haben die gleiche Kardinalität.*

Proposition 2.10.2 *Wenn zwei endliche Mengen die gleiche Kardinalität haben, dann sind sie isomorph.*

Die Begriffe Isomorphie und Kardinalität sind also eng miteinander verknüpft. Die folgenden Propositionen sind hilfreich für die Bestimmung von Kardinalitäten.

Proposition 2.10.3 *Seien X und $X_1, \ldots, X_n$ endliche Mengen. Dann sind die Potenz $\mathcal{P}(X)$, das Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ und die Summe $X_1 \uplus \cdots \uplus X_n$ endliche Mengen mit*

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(X)| &= 2^{|X|} \\ |X_1 \times \cdots \times X_n| &= |X_1| \cdot \ldots \cdot |X_n| \\ |X_1 \uplus \cdots \uplus X_n| &= |X_1| + \ldots + |X_n| \end{aligned}$$

Proposition 2.10.4 *Seien X und Y Mengen und sei X endlich. Weiter sei $\perp$ ein Objekt, das nicht in Y ist. Dann gilt:*

(1) $(X \to Y) \cong Y^{|X|}$

(2) $(X \rightharpoonup Y) \cong (Y \cup \{\perp\})^{|X|}$

Beweis Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine n-elementige Menge. Dann ist

$$\lambda f \in X \to Y \,.\, \langle f x_1, \ldots, f x_n \rangle$$

eine Bijektion $(X \to Y) \to Y^{|X|}$.
Sei $g = (\lambda x \in X \,.\, \perp)$. Dann ist

$$\lambda f \in X \rightharpoonup Y \,.\, \langle (g + f) x_1, \ldots, (g + f) x_n \rangle$$

eine Bijektion $(X \rightharpoonup Y) \to (Y \cup \{\perp\})^{|X|}$. $\square$

Hier ist ein Beispiel für die Anwendung der obigen Propositionen:

$$
\begin{aligned}
|(\mathcal{P}(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}) \times \mathbb{B}| &= |\mathcal{P}(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}| \cdot |\mathbb{B}| && \text{Proposition 2.10.3} \\
&= 2|\mathbb{B}|^{|\mathcal{P}(\mathbb{B})|} && \text{Proposition 2.10.4 und 2.10.1} \\
&= 2 \cdot 2^{(2^{|\mathbb{B}|})} && \text{Proposition 2.10.3} \\
&= 2 \cdot 2^{(2^2)} = 32
\end{aligned}
$$

Proposition 2.10.5 *Sei X, Y und Z Mengen. Dann gilt:*

$$X \times Y \to Z \quad \cong \quad X \to Y \to Z$$

Beweis Die Funktion

$$\lambda f \in X \times Y \to Z \,.\, \lambda x \in X \,.\, \lambda y \in Y \,.\, f(x,y)$$

ist eine Bijektion $(X \times Y \to Z) \to (X \to Y \to Z)$. □

Bemerkungen

Der Begriff der Funktion wird René Descartes (1596–1650) zugeschrieben. Graphen wurden erstmals von Leornard Euler (1707–1783) betrachtet (Königsberger Brückenproblem). Der Begriff der Menge ist jünger und stammt von Georg Cantor (1845-1918). Cantors Hauptaugenmerk richtete sich auf unendliche Mengen. Die Etablierung der Mengenlehre als primäres Begriffsgebäude der Mathematik erfolgte etwa 1930-1960. Alle in diesem Kapitel eingeführten Begriffe werden einem Gebiet zugerechnet, das als *Diskrete Mathematik* bezeichnet wird.

Wenn Sie bisher keine Erfahrung mit Hochschulmathematik haben, kann es durchaus sein, dass Sie dieses Kapitel als schwer verständlich empfinden. Das liegt einerseits an der Fülle der eingeführten Begriffe und Notationen, und andererseits an der mathematischen Sprache, in der dieses Kapitel formuliert ist. Die mathematische Sprache ist abstrakt, präzise und kompakt. Sie ist für Informatiker ein unentbehrliches Werkzeug, dass eine effiziente fachliche Kommunikation ermöglicht.

Die in diesem Kapitel eingeführten Begriffe und Notationen gehören zur Grundausstattung jedes akademischen Informatikers. Die Arbeit, die Sie investieren müssen, um damit effizient umgehen zu können, lohnt sich also.

Die Sprache der Mathematik ist eine der großen Kulturleistungen der Menschheit. In der Schule haben Sie den Gebrauch dieser Sprache bereits viele Jahre trainiert. Nichtsdestotrotz wird der Übergang von der Schul- zu Hochschulmathematik von vielen Studierenden als äußerst unsanft empfunden wir. Hier sind einige Tipps für Bücher, die Ihnen beim Einstieg in die Hochschulmathematik helfen können:

- Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications.* McGraw-Hill, 1999.
- Albrecht Beutelspacher, *Lineare Algebra – Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen.* Vieweg, 2001.
- Harry R. Lewis and Christos H. Papadimitriou, *Elements of the Theory of Computation.* Prentice Hall, 1998.

Das ausführliche Buch von Rosen ist ein gutes Bindeglied zwischen Gymnasial- und Hochschulmathematik und ist speziell auf die Bedürfnisse der Informatik ausgerichtet. Das Buch von Beutelspacher ist anspruchsvoller und richtet sich auch an Studienanfänger der Mathematik. Das Buch von Lewis und Papadimitriou ist eine Einführung in ein grundlegendes Gebiet der theoretischen Informatik. Das erste Kapitel könnte für Sie hilfreich sein, da es viele der von uns behandelten Begriffe und Notationen einführt. Wenn Sie keine Schwierigkeiten mit der Sprache der Mathematik haben und mehr über Mengenlehre wissen wollen, empfehle ich Ihnen das Buch

- Paul R. Halmos, *Naive Set Theory*, Springer-Verlag, 1974.

Dieses Buch zeigt Ihnen beispielsweise, dass man nur mit Mengen auskommen kann, da Tupel und Zahlen auf diese zurückgeführt werden können. Schließlich sei noch das Buch

- Bruno Buchberger und Franz Lichtenberger, *Mathematik für Informatiker I: Die Methode der Mathematik*, Springer-Verlag, 1980.

empfohlen, dass sich einsichtsvoll und ausführlich mit der Methode der Mathematik und ihrer Anwendung in der Informatik auseinandersetzt.

Glossar

Mathematische Objekte (Urobjekte (Zahlen), Tupel, Mengen; atomare und zusammengesetzte Objekte; Konstituenten (heißen auch Unterobjekte oder direkte Teilobjekte); (echte) Teilobjekte; finitär, infinitär; Wohlfundiertheitsaxiom; Baumdarstellung).

Aussagen A (Konjunktion $A \wedge B$, Disjunktion $A \vee B$, Negation $\neg A$, Implikation $A \implies B$, Äquivalenz $A \iff B$, universelle Quantifizierung $\forall x \in X \colon A$, existentielle Quantifizierung $\exists x \in X \colon A$).

Primitive Begriffe, definierte Begriffe, Notationen, Axiome, Sätze, Propositionen und Beweise.

Definition von Notationen mit $\overset{\text{def}}{\iff}$ und $\overset{\text{def}}{=}$.

Zahlen ($\mathbb{B}, \mathbb{N}_n^+, \mathbb{N}^+, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}$; Minimum und Maximum; Floor $\lfloor x \rfloor$ und Ceiling $\lceil x \rceil$; ganzzahlige Division und Modulo-Funktion).

Tupel $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ (Länge, Positionen, i-te Komponente; leeres Tupel $\langle\rangle$; n-stellige Tupel, Paare, Tripel).

Mengen (Elemente, $x \in X$, $x \notin X$, x ist in X; leere Menge $\emptyset$ und $\{\}$; endliche und unendliche Mengen; n-elementige Mengen $\{x_1, \dots, x_n\}$; Menge besteht aus ihren Elementen, Menge enthält ihre Elemente; (strikte) Inklusionsbeziehung, $X \subseteq Y$, $X \subsetneq Y$, (echte) Teilmengen, (echte) Obermengen; Notationen $\{ x \mid A \}$ und $\{ x \in X \mid A \}$; Disjunktheit; Isomorphie $X \cong Y$; Kardinalität $|X|$).

Mengenoperationen (Schnitt $X \cap Y$; Vereinigung $X \cup Y$; Differenz $X - Y$; Potenzen $\mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{P}_{\mathit{fin}}(X)$; Menge aller Tupel X^*; Produkt $X \times Y$; Summe oder disjunkte Vereinigung $X \uplus Y$ (Variantennummern); Pfeilmengen $X \rightharpoonup Y$, $X \to Y$ und $X \overset{\mathit{fin}}{\rightharpoonup} Y$).

Gerichtete Graphen $G = (V, E)$ (Knoten, Kanten; Nachfolger, Vorgänger; Quellen (initiale Knoten), Senken (terminale Knoten); Pfade (Ausgangs- und Endpunkt, Länge, einfach, Zyklus); Erreichbarkeit und Wurzeln; endlich, symmetrisch, gewurzelt, zyklisch, azyklisch; Größe und Tiefe von endlichen Graphen; symmetrischer Abschluss, (stark) zusammenhängend; (erreichbarer) Teilgraph; baumartig, Blätter, Baumdarstellung).

Binäre Relationen R (Definitionsbereich $\mathit{Dom}\, R$, Bildbereich $\mathit{Ran}\, R$, Knotenmenge $\mathit{Ver}\, R$; R definiert auf X; Relation auf X; Graph von R, Graphsicht und Graphdarstellung; Umkehrrelation R^{-1}, inverse Relation; funktional, injektiv, bijektiv, total, surjektiv; Komposition $R \circ R'$; Identität $\mathit{Id}(X)$ auf X; einbettbar; reflexiv, strikt, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, linear; $R^{\prec}$ und $R^{\succ}$; unendliche Pfade, terminierend, wohlfundiert).

Funktionen f (Zuordnungssicht (f bildet x auf y ab, f liefert für das Argument x das Ergebnis y, y ist der Wert von f für x, y ist das Bild von x unter f, x ist ein Urbild von y unter f); Notation fx; Umkehrfunktion und inverse Funktion; Lambda-Notation $\lambda x \in X \,.\, M$; Klammersparregeln; Unendlichen Folgen; Adjunktion $f + g$ und $f[x{:=}\, y]$; kartesische und kaskadierte Darstellung mehrstelliger Operationen; Bijektion $X \to Y$); Abbildung (X, f, Y) (Definitionsbereich, Graph, Wertebereich, injektiv, surjektiv, bijektiv).

Ordnungen (partiell, linear, wohlfundiert; Wohlordnung).

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1 (Teilobjekte) Sei das folgende Objekt gegeben:

$$x = \langle 1,\ \{2,3,\langle 2,3\rangle\},\ \langle 2,\langle 2,3\rangle\rangle\rangle$$

a) Zeichnen Sie die Baumdarstellungen von x.

b) Geben Sie alle atomaren Teilobjekte von x an.

c) Geben Sie alle direkten Teilobjekte von x an.

d) Geben Sie alle zusammengesetzten echten Teilobjekte von x an, die keine direkten Teilobjekte von x sind.

e) Wieviele Teilobjekte hat x?

□

Aufgabe 2.2 (Mengenoperationen) Geben Sie alle Elemente der folgenden Mengen an: $\mathbb{B} \cap \mathbb{Z}$, $\mathbb{B} \cup \mathbb{N}_4^+$, $\mathbb{N}_6^+ - \mathbb{N}_4^+$, $\mathcal{P}(\mathbb{N}_3^+)$, $\mathbb{B} \times \mathbb{N}_3^+$, $\mathbb{B} \uplus \mathbb{B}$, $\mathbb{B} \uplus \mathbb{B} \uplus \mathbb{B}$, $(\mathbb{B} \uplus \mathbb{B}) \uplus \mathbb{B}$, $\mathbb{B} \uplus (\mathbb{B} \times \mathbb{B})$. □

Aufgabe 2.3 (Graphen) Seien zwei Graphen $G = (V, E)$ gegeben:

a) $V = \{1,2,3,4,5,6\}$
$E = \{(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(3,5),(6,2),(6,3)\}$

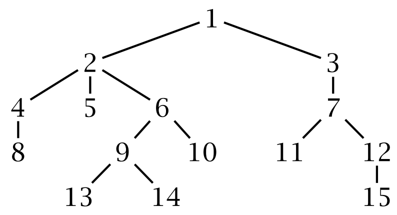
b) $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$E = \{(2,7),(3,1),(3,6),(4,2),(4,3),(7,5)\}$

Zeichnen Sie diese Graphen und beantworten Sie für jeden der Graphen die folgenden Fragen:

- Welche Größe und welche Tiefe hat der Graph?
- Welche Quellen, Senken und Wurzeln hat der Graph?
- Ist der Graph zyklisch? Wenn ja, geben Sie einen Zyklus an.
- Geben sie einen einfachen Pfad maximaler Länge an.
- Geben sie den vom Knoten 2 aus erreicbaren Teilgraphen an.
- Ist der Graph zusammenhängend? Stark zusammenhängend?
- Ist der Graph baumartig?

$\square$

Aufgabe 2.4 (Baumartige Graphen) Sei der folgende baumartige Graph gegeben:



a) Geben Sie den Graphen in der Form $G = (V, E)$ an.

b) Geben Sie die Größe und Tiefe des Graphen an.

c) Geben Sie die Wurzel und die Blätter des Graphen an.

d) Geben Sie für den Knoten 14 einen Pfad an, der von der Wurzel zu diesem Knoten führt. Gibt es mehrere solcher Pfade?

e) Zeichnen Sie alle Teilgraphen, die den Knoten 7 als Wurzel haben.

f) Geben Sie einen Teilgraphen an, der nicht baumartig ist.

$\square$

Aufgabe 2.5 (Endliche Relationen) Sei die folgende Relation gegeben:

$$R = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (4,1)\}$$

1. Zeichnen Sie die Graphdarstellung der Relation.
2. Geben Sie die Mengen *Dom* R, *Ran* R und *Ver* R an.
3. Ist R funktional? Injektiv? Total auf *Ver* R? Surjektiv auf *Ver* R?
4. Welche Kanten müssen Sie mindestens entfernen, damit R bijektiv wird?
5. Geben Sie die Umkehrrelation R^{-1} an.
6. Geben Sie die Komposition $R \circ R$ an.

$\square$

Aufgabe 2.6 (Injektive und surjektive Funktionen)

a) Geben Sie eine injektive Funktion in $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ an, die für $\mathbb{B}$ nicht surjektiv ist.

b) Geben Sie eine injektive Funktion in $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ an, die für $\mathbb{B}$ surjektiv ist.

c) Gibt es eine injektive Funktion in $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$?

□

Aufgabe 2.7 (Endliche Funktionen) Seien die Funktionen $f, g \in \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ wie folgt gegeben:

(x, y)	$f(x, y)$	$g(x, y)$
$(0, 0)$	0	0
$(0, 1)$	0	1
$(1, 0)$	0	1
$(1, 1)$	1	1

a) Geben Sie Graphdarstellungen für f und g an.

b) Geben Sie die Elemente von f und g an.

c) Geben Sie die Elemente von $f \circ g$ an.

d) Geben Sie die Elemente von $g^{-1} \circ f^{-1}$ an. Ist diese Relation eine Funktion?

e) Geben Sie die Elemente von $f + g$ an.

□

Aufgabe 2.8 (Lambda-Notation) Beschreiben Sie mithilfe der Lambda-Notation:

a) Eine unendliche Funktion, die nicht injektiv ist.

b) Eine Bijektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

c) Eine injektive Funktion $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, die nicht surjektiv für $\mathbb{N}$ ist.

d) Eine endliche Funktion, die infinitär ist.

□

Aufgabe 2.9 (Unendliche Folgen) Beschreiben Sie die folgenden unendlichen Folgen mit der Lambda-Notation:

a) $0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ (gerade natürliche Zahlen).

b) $0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ (Quadrate der natürlichen Zahlen).

c) $4, 9, 16, 25, 36, 42, \ldots$ (Quadrate der natürlichen Zahlen ab 2).

$\square$

Aufgabe 2.10 (Funktionswertige Funktionen) Sei die Funktion

$$f = \lambda\,(x, y) \in \mathbb{B}^2 .\ \text{if } x = y \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

gegeben. Dann gibt es genau eine Funktion $f' \in \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B})$ mit

$$\forall x \in \mathbb{B} \quad \forall y \in \mathbb{B} : \quad f(x, y) = (f'x)y$$

a) Beschreiben Sie f' mit der Lambda-Notation.

b) Geben Sie die Elemente von f' an.

$\square$

Aufgabe 2.11 (Terminierende Relationen) Seien zwei Relationen gegeben:

$$R_1 = \{\, ((x, y),\ (x', y')) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{R})^2 \mid x > x' \wedge\ y < y' \,\}$$
$$R_2 = \{\, ((x, y),\ (x', y')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^2 \mid x + y > x' + y' \geq -150 \,\}$$

Zeigen Sie, dass die Relationen terminieren, indem sie Funktionen angeben, die die Relationen in $NO(\mathbb{N})^{\succ}$ einbetten. $\square$

Aufgabe 2.12 (Kardinalitäten) Geben Sie die Kardinalitäten der folgenden Mengen an: $\mathbb{N}_3^+ \to \mathbb{N}_5^+$, $\mathbb{N}_3^+ \rightharpoonup \mathbb{N}_5^+$, $\mathbb{N}_3^+ \rightharpoonup \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N}_3^+ \uplus \mathbb{N}_5^+)$. $\square$