Kapitel 2

Induktion und Rekursion

2.1 Induktion

Induktion ist eine wichtige Beweistechnik. Leider wird Induktion oft so vermittelt, dass Anfänger zu dem Schluß kommen, Induktion wäre eine geheimnisvolle Angelegenheit. Das ist aber nicht der Fall. Induktion ist eine Beweistechnik, die auf einfache Art aus bekannten Beweisprinzipien ableitbar ist.

Induktion wurde im Mittelalter (Francesco Maurolico, 1494–1575) erfunden, um Eigenschaften von natürlichen Zahlen zu beweisen. Später erkannte Emmy Noether (1882-1935), dass Induktion im Rahmen der Mengenlehre allgemeiner so formuliert werden kann, dass damit Eigenschaften von beliebigen Mengen bewiesen werden können. Noethers allgemeine Formulierung der Induktion wird oft als *wohlfundierte Induktion* bezeichnet, und die Spezialisierung auf die natürlichen Zahlen ist als *vollständige Induktion* bekannt.

Der folgende Satz formuliert die Essenz der allgemeinen Form der Induktion:

Induktionssatz *Seien X und A Mengen und $\succ$ eine terminierende Relation. Dann folgt aus*

$$\forall x \in X\colon\ (\forall y \in X\colon\ x \succ y \Longrightarrow y \in A) \implies x \in A$$

dass $\forall x \in X\colon\ x \in A$ *gilt.*

Wir gehen zunächst auf die Anwendung des Induktionssatzes ein und verschieben seinen Beweis auf später. Für Neugierige sei verraten, dass der Beweis nicht schwer ist.

Nehmen Sie an, dass X und A Mengen sind, und dass die folgende Aussage bewiesen werden soll:

$$\forall x \in X\colon\ x \in A$$

Der Induktionssatz erlaubt uns, diese Aussage dadurch zu beweisen, dass wir eine terminierende Relation $\succ$ wählen und die erweiterte Aussage

$$\forall x \in X\colon\ (\forall y \in X\colon\ x \succ y \Longrightarrow y \in A) \implies x \in A$$

beweisen. Dies können wir gemäß des folgenden Schemas tun:[1]

Sei $x \in X$ und $\forall y \in X\colon\ x \succ y \Longrightarrow y \in A$.
Zu zeigen: $x \in A$.

Für den Beweis von $x \in A$ können wir also neben der Annahme $x \in X$ zusätzlich die so genannte **Induktionsannahme**

$$\forall y \in X\colon\ x \succ y \Longrightarrow y \in A$$

verwenden. Diese besagt, dass $y \in A$ für alle $y \in X$ gilt, die „kleiner“ als x sind (d.h. $x \succ y$). Insgesamt liefert uns der Induktionssatz also das folgende Beweisschema:

Gegeben Zwei Mengen X und A und eine terminierende Relation $\succ$.

Behauptung $\forall x \in X\colon x \in A$.

Beweis Sei $x \in X$ und $\forall y \in X\colon\ x \succ y \Longrightarrow y \in A$ (Induktionsannahme).
Zu zeigen: $x \in A$.

Im Rahmen eines Induktionsbeweises bezeichnen wir X als **Grundmenge**, A als **Aussagemenge** und $\succ$ als **Induktionsrelation**.

Um Schreibarbeit zu sparen, verzichtet man in der Praxis meistens auf die explizite Formulierung der Induktionsannahme und schreibt die Einleitung des Beweises wie folgt:

Gegeben Zwei Mengen X und A und eine terminierende Relation $\succ$.

Behauptung $\forall x \in X\colon x \in A$.

Beweis Durch Induktion über $x \in X$ gemäß $\succ$.
Zu zeigen: $x \in A$.

Darüberhinaus verzichtet man in vielen Fällen auf die explizite Angabe der Aussagemenge und der Induktionsrelation. Bei einer nach unten beschränkten Grundmenge $X \in \mathbb{Z}$ wird, falls nichts anderes vereinbart wird, stillschweigend $\{\,(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m > n\,\}$ als Induktionsrelation verwendet. Wir betrachten ein Beispiel.

[1] Um eine allquantifizierte Implikation $\forall x \in X\colon\ P \Longrightarrow Q$ zu beweisen, kann man $x \in X$ und P annehmen und dann Q zeigen.

Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n < 2^n$.

Beweis Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n = 0$. Dann $n = 0 < 1 = 2^0 = 2^n$.

Sei $n > 0$. Aus der Induktionsannahme folgt $n - 1 < 2^{n-1}$. Also $n = n - 1 + 1 < 2^{n-1} + 1 \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$. □

Die dem Beweis zugrundeliegende Grundmenge ist $\mathbb{N}$, die Aussagemenge ist $\{\, n \in \mathbb{N} \mid n < 2^n \,\}$, die Induktionsrelation ist $\{\,(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m > n\,\}$, und die Induktionsannahme ist $\forall m \in \mathbb{N}\colon\ n > m \Longrightarrow m < 2^m$.

Induktionsbeweise enthalten typischerweiser eine Fallunterscheidung. Der obige Beweis unterscheidet zwischen $n = 0$ und $n > 0$. Dabei wird die Induktionsannahme nur für den Fall $n > 0$ benötigt. Da der Induktionssatz die Fallunterscheidung nicht vorgibt, kann ihr Format je noch Beweisproblem frei gewählt werden. Hier ist ein zweites Beispiel.

Behauptung Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist als Produkt von Primzahlen darstellbar.

Beweis Durch Induktion über $n \geq 2$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

n ist eine Primzahl. Dann ist die Behauptung tivial.

n ist keine Primzahl. Dann $n = ab$ für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq a, b < n$. Aus der Induktionsannahme folgt, dass a und b als Produkte von Primzahlen darstellbar sind. Also ist $n = ab$ als Produkt von Primzahlen darstellbar. □

Aufgabe 2.1 Beweisen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon\ n^3 - n = 3k$. □

Aufgabe 2.2 Was ist an dem folgenden Induktionsbeweis verkehrt? Geben Sie zunächst die Induktionsannahme an.

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ 2^n = 1$.

Beweis: Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n = 0$. Dann $2^n = 2^0 = 1$.

Sei $n > 0$. Aus der Induktionsannahme folgt $2^{n-1} = 1$ und $2^{n-2} = 1$. Also $2^n = \frac{2^{n-1} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$. □

Wir sprechen von **natürlicher Induktion**, wenn es sich bei der Grundmenge X um eine nach unten beschränkte Teilmenge der ganzen Zahlen und bei der Induktionsrelation um die Menge $\{\,(x,y) \in X^2 \mid x > y\,\}$ handelt.

Sei X eine Menge und $f \in X \to \mathbb{N}$. Dann ist $\{\,(x,y) \in X^2 \mid fx > fy\,\}$ eine terminierende Relation. Induktionsbeweise, die gemäß einer so konstruierten Induktionsrelation geführt werden, bezeichnen wir als **quasinatürlich**.

Eine endliche Menge mit n Elementen hat bekanntlich 2^n Teilmengen. Diese Tatsache kann mit quasinatürlicher Induktion bewiesen werden.

Behauptung Sei M eine endliche Menge. Dann gilt: $\forall T \in \mathcal{P}(M)\colon\ |\mathcal{P}(T)| = 2^{|T|}$.

Beweis Durch Induktion über $T \in \mathcal{P}(M)$ gemäß $|T|$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $|T| = 0$. Dann $T = \emptyset$ und $\mathcal{P}(T) = \{\emptyset\}$. Also $|\mathcal{P}(T)| = 1 = 2^0 = 2^{|T|}$.

Sei $|T| > 0$. Sei $x \in T$. Dann

$$\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(T - \{x\}) \cup \{\, S \cup \{x\} \mid S \in \mathcal{P}(T - \{x\})\,\}$$

und folglich

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(T)| &= |\mathcal{P}(T - \{x\})| + |\{\, S \cup \{x\} \mid S \in \mathcal{P}(T - \{x\})\,\}| \\ &= |\mathcal{P}(T - \{x\})| + |\mathcal{P}(T - \{x\})| \\ &= 2|\mathcal{P}(T - \{x\})| \end{aligned}$$

Da $(T - \{x\}) \in \mathcal{P}(M)$ und $|T| > |T - \{x\}| = |T| - 1$, folgt aus der Induktionsannahme, dass $|\mathcal{P}(T - \{x\})| = 2^{|T-\{x\}|}$. Also $|\mathcal{P}(T)| = 2|\mathcal{P}(T - \{x\})| = 2 \cdot 2^{|T-\{x\}|} = 2 \cdot 2^{|T|-1} = 2^{|T|}$. □

Dieser Induktionsbeweis verwendet die Grundmenge $\mathcal{P}(M)$ und die Induktionsrelation $\{\, (S,T) \in \mathcal{P}(M)^2 \mid |S| > |T|\,\}$. Beachten Sie, dass keine Menge existiert, die alle endlichen Mengen enthält.[2]

Wir kommen jetzt zum Beweis des Induktionssatzes.

Satz 2.1.1 (Induktionssatz) *Seien X und A Mengen und $\succ$ eine terminierende Relation. Dann folgt aus*

$$\forall x \in X\colon\ (\forall y \in X\colon\ x \succ y \Longrightarrow y \in A) \implies x \in A$$

dass $\forall x \in X\colon\ x \in A$ *gilt.*

Beweis Durch Widerspruch. Gelte $\exists x \in X\colon x \notin A$ und

$$(*) \quad \forall x \in X\colon\ (\forall y \in X\colon\ x \succ y \Longrightarrow y \in A) \implies x \in A$$

Da $X - A \neq \emptyset$ und $\succ$ eine terminierende Relation ist, existiert ein $x \in X - A$, sodass $\forall y \in X - A\colon\ \neg(x \succ y)$. Also $\forall y \in X\colon\ x \succ y \Longrightarrow y \in A$. Also folgt mit $(*)$, dass $x \in A$. Widerspruch zu $x \in X - A$. □

[2] Angenommen, E wäre eine solche Menge. Da $\{E\}$ dann genau ein Element hätte, wäre $\{E\} \in E$. Widerspruch zum Wohlfundierungsaxiom.

Bemerkungen

Induktion ist eine durch den Induktionssatz legitimierte Beweistechnik. Für Induktion ist eine terminierende Relation erforderlich. Der Beweis des Induktionssatzes ist einfach und erfolgt mit Widerspruch.

Die meisten einführenden Lehrbücher verzichten auf die Formulierung des Induktionssatzes und führen Induktion kochrezeptartig für den Spezialfall der natürlichen Zahlen ein (vollständige Induktion). Dieses (hoffentlich) didaktisch motivierte Vorgehen verschleiert den korrekten logischen Status von Induktion und verfehlt damit letzendlich sein Ziel, die Anwendung von Induktion für den Anfänger möglichst einfach zu machen. Es ist keine Überraschung, wenn so geschulte Anfänger das Gefühl nicht los werden, dass Induktion irgendwie kompliziert und unergründlich ist.

Glossar

Induktion (natürliche, quasinatürliche, vollstängige, wohlfundierte; Grundmenge, Aussagemenge, Induktionsrelation).