# 1. Klausur Introduction to Computational Logic (SS 2004)

Prof. Dr. Gert Smolka Marco Kuhlmann, MSc

5. Juni 2004

Name Sitzplatz

Matrikelnummer Code

Bitte öffnen Sie das Klausurheft erst dann, wenn Sie dazu aufgefordert werden.

Sie können die Klausur nur auf dem für Sie vorgesehen Platz schreiben. Sie müssen das mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehene Heft verwenden.

Hilfsmittel sind nicht zugelassen. Am Arbeitsplatz dürfen nur Schreibgeräte, Getränke, Speisen und Ausweise mitgeführt werden. Taschen und Jacken müssen an den Wänden des Klausursaals zurückgelassen werden.

Das Verlassen des Saals ohne Abgabe des Klausurhefts gilt als Täuschungsversuch.

Wenn Sie während der Bearbeitung zur Toilette müssen, geben Sie bitte Ihr Klausurheft bei der Aufsicht ab. Es kann immer nur eine Person zur Toilette.

Alle Lösungen müssen auf den bedruckten rechten Seiten des Klausurhefts notiert werden. Die leeren linken Seiten dienen als Platz für Skizzen und werden **nicht korrigiert.** Notizpapier ist nicht zugelassen. Sie können mit Bleistift schreiben.

Für die Bearbeitung der Klausur stehen 150 Minuten zur Verfügung. Insgesamt können 150 Punkte erreicht werden. Die für jede Aufgabe angebene Punktzahl gibt Ihnen also einen Anhaltspunkt, wieviel Zeit Sie auf die Bearbeitung der Aufgabe verwenden sollten. Zum Bestehen der Klausur genügen 75 Punkte.

Bitte legen Sie zur Identifikation Ihren Personalausweis bzw. Reisepass sowie Ihren Studierendenausweis neben sich.

Viel Erfolg!

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe | **Note** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |
| 12 | 15 | 20 | 20 | 16 | 15 | 15 | 20 | 17 | 150 | |

## Aufgabe 1. Boolesche Algebren und Funktionen (2 + 2 + 5 + 3 = 12)

a) Geben Sie eine Boolesche Algebra mit 8 Elementen an.

b) Warum gibt es keine Boolesche Algebra mit 7 Elementen?

c) Geben Sie einen Term $M$ an, sodass für jeden Zustand $\sigma$ gilt:

$$\mathcal{T}\,M\,\sigma \quad = \quad \lambda\, a \in \mathbb{B}.\, \lambda\, b \in \mathbb{B}.\ \text{if } a \neq b \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

d) Seien genau $n$ Variablen des Typs $B$ verfügbar und sei eine feste Variablenordnung vorgegeben. Wieviele Primbäume gibt es dann?

**Aufgabe 2. Abschlussoperatoren** $(2 + 3 + 10 = 15)$

Sei eine Menge $X$ gegeben. Sie sollen die Menge der Abschlussoperatoren für $X$ mit einem Lambda-Ausdruck darstellen, der neben den Typkonstanten $\mathbb{B}$ und $X$ nur die folgenden logischen Konstanten verwendet:

$$\begin{aligned} \wedge &\in \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B} \\ \Longrightarrow &\in \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B} \\ \forall_T &\in (T \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B} && \text{für jeden mit } \mathbb{B} \text{ und } X \text{ gebildeten Typ } T \end{aligned}$$

a) Stellen Sie die Potenzmenge von $X$ durch einen Typ $PX$ dar.

$$PX \stackrel{\text{def}}{=}$$

b) Stellen Sie die Inklusionsbeziehung für Teilmengen von $X$ durch einen Ausdruck $\sqsubseteq : PX \to PX \to \mathbb{B}$ dar.

$$\sqsubseteq \stackrel{\text{def}}{=} \lambda A \in PX.\, \lambda B \in PX.$$

c) Stellen Sie die Menge der Abschlussoperatoren für $X$ durch einen Ausdruck $cop : (PX \to PX) \to \mathbb{B}$ dar.

$$cop \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f \in PX \to PX.$$

**Aufgabe 3. Substitution, Baumdarstellung und Reduktion** (5 + 15 = 20)

Sei der folgende Term gegeben:

$$M \quad = \quad ((\lambda f.\, f x)\,(\lambda x y.\, f x y)\, y)\,[f := \lambda y z.\, x]$$

a) Geben Sie die λ-Normalform des Terms $\lambda f.\, f M$ an. (Die λ-Normalform eines Terms erhält man, indem man den Term so lange wie möglich mit der $\beta$- und $\eta$-Regel vereinfacht.

b) Geben Sie die de-Bruijn-Baumdarstellung des Terms $M$ an. Nehmen Sie dabei an, dass die Variable $x$ den Typ $b$ hat (d. h. $\Gamma_0 x = b$). Daraus ergeben sich die Typen der Variablen $y$, $z$ und $f$ in eindeutiger Weise.

## Aufgabe 4. Abstrakte Syntax (10 + 5 + 5 = 20)

Wir stellen die abstrakte Syntax von ETT in Standard ML gemäß den folgenden Typdeklarationen dar:

```
type tc = string
datatype ty = TC of tc | TA of ty*ty
type vc = string
type var = int
datatype pt = C of vc | V of var | A of pt*pt | L of ty*pt
```

a) Vervollständigen Sie die Prozedur $free : var \to pt \to bool$ so, dass sie testet, ob eine Variable in einem Präterm frei vorkommt.

```
fun free x (C c) =

  | free x (V y) =

  | free x (A(m,m')) =

  | free x (L(t,m)) =
```

b) Geben Sie eine Prozedur $beta : pt \to bool$ an, die testet, ob ein Präterm ein $\beta$-Redex ist (d. h., ob er auf oberster Ebene gemäß der $\beta$-Regel reduzierbar ist).

c) Geben Sie eine Prozedur $eta : pt \to bool$ an, die testet, ob ein Präterm ein $\eta$-Redex ist (d. h., ob er auf oberster Ebene gemäß der $\eta$-Regel reduzierbar ist).

## Aufgabe 5. Gleichheitsregeln (5 + 5 + 3 + 3 = 16)

In dieser Aufgabe geht es um die Gleichheitsregeln für ETT. Sie sollen die Regeln für Ersetzung und Einsetzung sowie die Beta- und die Eta-Regel angeben. Als kleine Hilfe zeigen wir Ihnen die Reflexivitäts-, Symmetrie- und Transitivitätsregel.

### Reflexivität, Symmetrie und Transitivität

$$\frac{}{M = M} \qquad \frac{M = N}{N = M} \qquad \frac{M = N \quad N = M'}{M = M'}$$

**Ersetzung** (Verwenden Sie die Notation $M/N \approx M'/N'$.)

**Einsetzung**

**Beta**

**Eta**

## Aufgabe 6. Beweis von Gleichungen (15)

Sei die Signatur für Boolesche Algebren gegeben. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(x, y, z) \Rightarrow (x, u, v) \quad = \quad (x,\ y \Rightarrow u,\ z \Rightarrow v)$$

mit den Gleichheitsregeln aus den Gleichungen in *BG* abgeleitet werden kann. Es genügt, wenn Sie die Verwendung der Resolutionsgesetze vermerken.

**Aufgabe 7. Lösen von Booleschen Gleichungssystemen** $(5 + 5 + 5 = 15)$

Seien die Variablen $x < y < z$ und das folgende Boolesche Gleichungssystem gegeben: $S = \{xy = xz,\ x + y = x + z\}$

a) Stellen Sie die Lösungsmenge von $S$ durch einen Primbaum dar.

b) Stellen Sie die Lösungsmenge von $S \cup \{x + z = y + z\}$ durch einen Primbaum dar.

c) Stellen Sie die Lösungsmenge von $S \cup \{y = \overline{z}\}$ durch einen Primbaum dar.

## **Aufgabe 8. Primbaumalgorithmen** (20)

Wir stellen Entscheidungsbäume in Standard ML gemäß den folgenden Typdeklarationen dar:

```
type var = int
datatype dt = F | T | D of var * dt * dt
```

Dabei steht $F$ für 0 und $T$ für 1. Für die Variablen vereinbaren wir die durch den Typ *int* gegebene Ordnung.

Vervollständigen Sie die unten angegebene Prozedur $equiv : dt \to dt \to dt$ so, dass sie zu zwei Primbäumen $A$ und $B$ stets den Primbaum für $A \Leftrightarrow B$ liefert. Benutzen Sie dabei nur die angegebene Hilfsprozedur *red*.

```
fun red (t as (_, a, b)) = if a=b then a else D t


fun equiv T b =


  | equiv a T =


  | equiv F F =


  | equiv F (D(y,b0,b1)) =


  | equiv (D(x,a0,a1)) F =


  | equiv (a as D(x,a0,a1)) (b as D(y,b0,b1)) =
```

**Aufgabe 9. Graphfärbung** $(5 + 7 + 5 = 17)$

Sei ein Graph $(V, E)$ gegeben. Sie sollen ein Boolesches Gleichungssystem angeben, das genau dann lösbar ist, wenn die Knoten des Graphen mit 3 Farben so eingefärbt werden können, dass 2 durch eine Kante verbundene Knoten immer verschiedene Farben haben. Die Lösungen des Gleichungssystems sollen genau den zulässigen Färbungen des Graphen entsprechen.

Wir helfen Ihnen etwas. Sei $V = \{1, \ldots, n\}$ die Menge der Knoten. Für jeden Knoten $i \in V$ führen wir zwei Variablen $x_i$ und $y_i$ ein. Das Paar $(x_i, y_i)$ kann vier verschiedene Farben beschreiben.

a) Geben Sie für jeden Knoten $i \in V$ eine Gleichung an, die dafür sorgt, dass nur 3 Farben möglich sind.

b) Geben Sie für jede Kante $(i, j) \in E$ eine Gleichung an, die dafür sorgt, dass die durch sie verbundenen Knoten verschiedene Farben haben.

c) Geben Sie alternativ zu (a) für jeden Knoten $i \in V$ eine Gleichung an, die dafür sorgt, dass nur 2 Farben möglich sind.

## Notationen

Wir setzen die folgenden Notationen voraus:

$$
\begin{aligned}
A \Rightarrow B &\stackrel{\text{def}}{=} \overline{A} + B && \textit{Implikation} \\
A \Leftrightarrow B &\stackrel{\text{def}}{=} (A \Rightarrow B)(B \Rightarrow A) && \textit{Äquivalenz} \\
(A, B, C) &\stackrel{\text{def}}{=} \overline{A}B + AC && \textit{Konditional}
\end{aligned}
$$