6. Übungsblatt Informatik II (SS 96)

Michael Mehl, Prof. Gert Smolka
(mehl,smolka)@dfki.uni-sb.de

Ausgabe: 31. Mai 1996 **Abgabe:** 7. Juni 1996 vor der Vorlesung

Aufgabe 6.1 [Addition von 2er-Komplement Zahlen] (5 Punkte)

1. Der Test zum Überlauf der Addition von 2er-Komplement-Zahlen vergleicht die Überträge c_{n-1} und c_n. Geben Sie einen Schaltkreis an, der die Funktion
$$\equiv : \{0,1\}^2 \to \{0,1\} \text{ mit } \equiv(x_1, x_2) = 1 \text{ gdw. } x_1 = x_2.$$
implementiert.

2. Addierer für Binärzahlen kann man direkt als 2er-Komplement Addierer verwenden. Seien $a, b, s \in \{0,1\}^n$, $c \in \{0,1\}$ und $\langle c, s\rangle = \langle a\rangle + \langle b\rangle$. Zeigen Sie
$$[a] + [b] \in \{-2^n, \ldots, 2^n - 1\} \text{ gdw. } \begin{array}{l} [a] < 0 \text{ und } [b] < 0 \text{ und } [s] < 0 \text{ oder} \\ [a] > 0 \text{ und } [b] > 0 \text{ und } [s] > 0. \end{array}$$

3. Geben Sie einen Schaltkreis an, der aus den höchstwertigsten Bits von a, b und s ein Überlaufsignal berechnet, das 1 ist gdw. ein Überlauf vorliegt.

Aufgabe 6.2 [$\circ$] (2 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Funktion $\circ : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}^2$
$$\circ(x_1, x_2) := (x_1 \vee (y_1 \wedge x_2), y_2 \wedge x_2) \; \forall x, y \in \{0,1\}$$
assoziativ ist.

Aufgabe 6.3 [Carry-Lookahead Addierer] (6 Punkte)

Seien $a, b \in \{0,1\}^n$ und $c_{-1} \in \{0,1\}$ gegeben. Dann definieren wir induktiv für $0 \le i \le j < n$ die Größen $p_{ij}, g_{ij}, c_i \in \{0,1\}$ wie folgt:
$$\begin{array}{rcll} p_{ii} & := & a_i \oplus b_i & \\ p_{ij} & := & p_{ij-1} \wedge p_{jj} & \text{für } i < j \\ g_{00} & := & (a_0 \wedge b_0) \vee (p_{00} \wedge c_{-1}) & \\ g_{ii} & := & a_i \wedge b_i & \text{für } i > 0 \\ g_{ij} & := & g_{jj} \vee (g_{ij-1} \wedge p_{jj} a) & \text{für } i < j \\ c_i & := & (a_i \wedge b_i) \vee (a_i \oplus b_i) \wedge c_{i-1} & \end{array}$$

Zeigen Sie

1. $p_{ij} = 1 \Leftrightarrow c_j = c_{i-1}$
2. $g_{ij} = 1 \Leftrightarrow c_j = 1$

Aufgabe 6.4 [Kaskadierbare ALU] (4 Punkte)

1. Konstruieren Sie eine *kaskadierbare* 4-Bit ALU mit den Eingängen $a, b \in \{0,1\}^4, c_{in}, s \in \{0,1\}$ und den Ausgängen $out \in \{0,1\}^n, c_{out} \in \{0,1\}$, die zwei Funktionen realisiert: 4-Bit Addition $\langle a\rangle + \langle b\rangle + c_{in} = \langle c_{out}, out\rangle$ bei $s = 0$ und Inkrementierung $\langle a\rangle + 1 = \langle c_{out}, out\rangle$ bei $s = 1$. Benutzen Sie dabei einen 4-Bit Addierer.

2. Konstruieren Sie durch Kaskadierung eine 16-Bit ALU mit gleicher Funktionalität.

Aufgabe 6.5 [Shift] (8 Punkte)
Die Funktion $\mathrm{cls}_i : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ (zyklischer Linksshift) sei für $n \in I\!N$ und $0 \leq i < n$ definiert als

$$\mathrm{cls}_i(a_{n-1}, \ldots, a_0) := (a_{n-i-1}, \ldots, a_0, a_{n-1}, \ldots, a_{n-i}) \;\; (a_i \in \{0,1\}).$$

Sei $n = 2^i$. Ein n-Bit Barrelshifter ist ein Schaltkreis, der die Funktion $\mathrm{bs} : \{0,1\}^{n+i} \to \{0,1\}^n$ berechnet:

$$\mathrm{bs}(a,b) = \mathrm{cls}_{\langle b \rangle}(a) \;\; (a \in \{0,1\}^n, b \in \{0,1\}^i).$$

1. Konstruieren Sie einen Barrelshifter mit Kosten $O(n \cdot i)$. Verwenden Sie dabei n-Bit Multiplexer.

2. Fügen Sie einen Eingang $r \in \{0,1\}$ zum Barrelshifter hinzu, der bestimmt ob der Shift nach rechts oder links erfolgt. Bei $r = 1$ soll der Shift nach rechts erfolgen und bei $r = 0$ wie bisher nach links. Realisieren Sie diese Erweiterung mit nur $O(i)$ zusätzlichen Gattern.

3. Entwerfen Sie einen Schaltkreis, der einen einfachen Rechtsshift $\mathrm{rsh} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ realisiert:

$$\mathrm{rsh}(a_{n-1}, \ldots, a_0) := (0, a_{n-1}, \ldots, a_1).$$