Lösungen zum 0. Übungsblatt Informatik II (SS 96)

Frank Berwanger (franky@cscip.uni-sb.de)
Michael Mehl (mehl@dfki.uni-sb.de)

Lösung zu Aufgabe 0.1 [Mengen]

$M = \{a, b, c, d, e, f\} \Rightarrow \#M = 7$.
Für die Mächtigkeit der Potenzmenge gilt: $\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M} = 2^7 = 128$.
Für die Mächtigkeit des kartesischen Produkts: $\#(M \times M) = \#M^2 = 7^2 = 49$.

Lösung zu Aufgabe 0.2 [Funktionen]

1. f ist surjektiv:
   Sei $y \in \mathcal{N}$ beliebig. Wähle $x = y + 1$ den Nachfolger von y. Dieser existiert, weil $\mathcal{N}$ gerade über die Nachfolgerfunktion definiert ist. Desweiteren gilt $x > 1$.
   Es gilt: $f(x) = (y + 1) - 1 = y$ qed.

2. f ist nicht injektiv, da $f(1) = f(2) = 1$ und $1 \neq 2$.

3. Da f nicht injektiv ist, folgt, daß f nicht bijektiv ist.

Lösung zu Aufgabe 0.3 [Abzählbarkeit]

1. Die Menge M_1 aller Funktionen $f : B \rightarrow B$ ist endlich:
   $M_1 = \{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)\}$

2. Die Menge M_2 aller Funktionen $f : B^* \rightarrow B$ ist überabzählbar.
   Beweis: (indirekt)
   Annahme: M_2 ist abzählbar, d.h. man kann die Funktionen in M_2 durchnumerieren. $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$. Liste in einer Tabelle **alle** Funktionen f_i mit ihren Funktionswerten auf. (Bem: B^* ist abzählbar nach Lemma 1.16 Seite 64 [MU/PA].)

	ϵ	0	1	00	01	10	11	000	001	010	...
f_1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	...
f_2	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	...
f_3	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	...
f_4	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	...
f_5	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	...
f_6	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	...
$\vdots$											

   Betrachte die Funktion g, die sich von der Funktion f_i an der i-ten Stelle unterscheidet.
   $g = (0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$
   Offensichtlich gilt $g \in M_2$, aber aufgrund der Konstruktion kann g nicht in der Tabelle stehen. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, daß **alle** Funktionen aus M_2 in der Tabelle stehen.
   $\Rightarrow M_2$ ist überabzählbar.

Lösung zu Aufgabe 0.4 [Relationen]

1. R ist nicht symmetrisch, da $|0|_1 \leq |1|_1$ aber $|1|_1 \not\leq |0|_1$.
2. R ist nicht antisymmetrisch, weil $|01|_1 \leq |10|_1 \wedge |10|_1 \leq |01|_1$ aber $10 \neq 01$.
3. R ist transitiv, da $|a|_1, |b|_1$ und $|c|_1 \in \mathcal{N}$ und $\leq$ auf $\mathcal{N}$ transitiv ist.
4. R ist reflexiv, da $|a|_1 \leq |a|_1$
5. R ist total, da auch $\leq$ auf $\mathcal{N}$ total ist.
6. R ist keine Ordnungsrelation, da R nicht antisymmetrisch ist.

Lösung zu Aufgabe 0.5 [Zeichenreihen]

1. Seien $B := \{a, b, c, \ldots, z\}$ und *spc* das Leerzeichen. Dann kann man die Sprache L wie folgt rekursiv definieren:

$$L ::= B^+ \,|\, \{(L\,\{spc^+\,Wort_L\}^*)\}$$

2. Sei $spc \leq a \leq b \leq \ldots \leq z \leq (\leq)$. Sei $w_1 = a_1a_2 \ldots a_n \neq b_1b_2 \ldots b_m = w_2$. Dann definiere $w_1 \leq w_2 \Leftrightarrow \exists$ i derart daß $a_i < b_i$ und $\forall j < i : a_j = b_j$.

   Beweis :

   1. Transitiviät Sei $A < B$ und $B < C$. Dann $\exists$ i derart daß $a_i < b_i$ und $\forall l < i : a_l = b_l$, und $\exists$ j derart daß $b_j < c_j$ und $\forall l < j : b_l = c_l$. $\Rightarrow A = b_1 \ldots b_{i-1}\, a_i \ldots a_n$ und $B = c_1 \ldots c_{j-1} b_j \ldots b_m$.
   Annahme : $C < A \Rightarrow \exists$ k derart daß $c_k < a_k$ und $\forall l < k : c_l = a_l \Rightarrow A = c_1 \ldots c_{k-1} a_k \ldots a_n$
   1.Fall : $k \geq j \Rightarrow B < A$, da $a_j = c_j > b_j$
   2.Fall : $k < j \Rightarrow B < A$, da $a_k > c_k > b_k$
   $\Rightarrow A > B \Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow$ transitiv

   2. Totalität Gelte weder 1.) $A \leq B$ noch 2.) $B \leq A$. Aus 1.) folgt $\exists$ i der art daß $a_i \geq b_i$ und $\forall j < i : a_j = b_j$. Aus 2.) folgt $\neg\exists$ i derart daß $a_i \geq b_i$ und $\forall j < i : a_j = b_j \Rightarrow$ Widerspruch.

   3. Reflexivität Annahme: Sei $A \leq B$ und $B \leq A$ und $A \neq B$
   $\Rightarrow ((i)\ \exists$ i derart daß $a_i < b_i$ und $\forall l <$ i : $a_l = b_l) \wedge ((ii)\ \exists$ j derart daß $b_j < a_j$ und $\forall l <$ j : $b_l = a_l)$
   1.Fall : $i > j :\Rightarrow$ Widerspruch, da $a_j < b_j$ nach (ii) aber $a_j = b_j$ nach (i)
   2.Fall : $j > i :\Rightarrow$ Widerspruch, da $b_i < a_i$ nach (i) aber $a_i = b_i$ nach (ii)
   3.Fall : $i = j :\Rightarrow$ Widerspruch
   $\Rightarrow$ es existieren keine solchen i und j, damit ist $A = B$.

   Nach *1. 2.* und *3.* $\Rightarrow$ Ordnungsrelation.