Lösungen zum 1. Übungsblatt Informatik II (SS 96)

Georg Demme (azrael@cscip.uni-sb.de)
Michael Mehl (mehl@dfki.uni-sb.de)

Lösung zu Aufgabe 1.1 [Min- und Maxterme]

1. $m(a) = x_1\ x_2\ \overline{x_3}\ \overline{x_4}$
   $c(a) = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4$

2. (a)
   - Träger: $T(e) = \{(1,1,0),(1,1,1),(0,0,1),(1,0,1)\}$
   - Konjunktive Normalform:
     $e \equiv (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$
   - Disjunktive Normalform:
     $e \equiv (x_1\ x_2\ \overline{x_3}) \vee (x_1\ x_2\ x_3) \vee (\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3) \vee (x_1\ \overline{x_2}\ x_3)$

   (b)
   - Träger: $T(e) = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,0)\}$
   - Konjunktive Normalform:
     $e \equiv (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$
   - Disjunktive Normalform:
     $e \equiv (\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3) \vee (\overline{x_1}\ x_2\ \overline{x_3}) \vee (x_1\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}) \vee (x_1\ x_2\ \overline{x_3})$

Lösung zu Aufgabe 1.2 [Identitäten]

1. (a) $\overline{x_1 \vee \overline{(x_1\ x_2 \vee x_1\ \overline{x_2})}\overline{x_3}} \overset{(B8)}{=} \overline{x_1} \wedge \overline{\overline{(x_1\ x_2 \vee x_1\ \overline{x_2})}\overline{x_3}}$
   $\overset{(B8/9)}{=} \overline{x_1} \wedge ((x_1\ x_2 \vee x_1\ \overline{x_2}) \vee x_3) \overset{(B3)}{=} \overline{x_1} \wedge ((x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x_2})) \vee x_3)$
   $\overset{(B6)}{=} \overline{x_1} \wedge ((x_1 \wedge 1) \vee x_3) \overset{(B7)}{=} \overline{x_1} \wedge (x_1 \vee x_3)$

   (b) $(x_1 \vee ((x_1 \wedge (x_2 \vee (\overline{x_2} \wedge 1))) \wedge x_2)) \wedge \overline{(x_1 \vee (x_1 \wedge x_2))}$
   $\overset{(B7)}{=} (x_1 \vee ((x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x_2})) \wedge x_2)) \wedge \overline{(x_1 \vee (x_1 \wedge x_2))}$
   $\overset{(B6)}{=} (x_1 \vee ((x_1 \wedge 1) \wedge x_2)) \wedge \overline{(x_1 \vee (x_1 \wedge x_2))} \overset{(B7)}{=} \underbrace{(x_1 \vee (x_1 \wedge x_2))}_{A_1} \wedge \underbrace{\overline{(x_1 \vee (x_1 \wedge x_2))}}_{\overline{A_1}}$

   $= A_1 \wedge \overline{A_1} \overset{(B6)}{=} 0$

2. (a) Beweis durch Belegungstabelle:

x_1	x_2	x_3	$x_2 \wedge x_3$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \vee x_3$	$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$	$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

   (b) Beweis durch Belegungstabelle:

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{x_1 \wedge x_2}$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Lösung zu Aufgabe 1.3 [$\tilde{B}$-Ausdrücke]

1. (a) $e_1 \equiv\sim (\sim (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \wedge \sim (\sim x_1 \wedge x_2 \wedge \sim x_3) \wedge \sim (x_1 \wedge \sim x_2 \wedge x_3) \wedge$
$\sim (\sim x_1 \wedge \sim x_2 \wedge \sim x_3))$

   (b) $e_2 \equiv\sim (\sim x_1 \wedge (\sim (x_2 \wedge \sim x_3) \wedge \sim (x_3 \wedge \sim x_4)))$

2. Sei f eine n-stellige Schaltfunktion, e der zu f äquivalente boolsche Ausdruck und $\tilde{e}$ der zu erzeugende $\tilde{B}$-Ausdruck. Dann sei die Funktion $\tau : B \rightarrow \tilde{B}$ wie folgt definiert:

   - $e = 0 \Rightarrow \tau(e) = 0$ und $e = 1 \Rightarrow \tau(e) = 1$
   - $e = x$, x aus der Menge der Variablen V$\Rightarrow \tau(e) = x$
   - $e = \overline{e_1} \Rightarrow \tau(e) = \overline{\tau(e_1)}$
   - $e = (e_1 \wedge e_2) \Rightarrow \tau(e) = (\tau(e_1) \wedge \tau(e_2))$
   - $e = (e_1 \vee e_2) \Rightarrow \tau(e) = \overline{(\overline{\tau(e_1)} \wedge \overline{\tau(e_2)})}$

   Die Korrektheit und die Vollständigkeit der Funktion τ wird nun durch strukturelle Induktion über e gezeigt.

   - Induktionsverankerung:
     Sei $e = 0 \Rightarrow \tilde{e} = \tau(0) = 0$
     $e = 1 \Rightarrow \tilde{e} = \tau(1) = 1$
     $e = x, x \in V \Rightarrow \tilde{e} = \tau(x) = x$
     dann ist $\tilde{e}$ jeweils der korrekte $\tilde{B}$-Ausdruck.
   - Induktionsvoraussetzung:
     Seien e_1 und e_2 B-Ausdrücke und seien $\tilde{e_1}$ und $\tilde{e_2}$ die dazugehörigen $\tilde{B}$-Ausdrücke.
   - Induktionsschritt:
     $e = (e_1 \wedge e_2) \Rightarrow \tilde{e} = \tau(e_1 \wedge e_2) = (\tau(e_1) \wedge \tau(e_2))$
     Daraus ergibt sich mit der Induktionsvoraussetzung der korrekte $\tilde{B}$-Ausdruck:
     $\tilde{e} = (\tilde{e_1} \wedge \tilde{e_1})$
     $e = (e_1 \vee e_2) \Rightarrow \tilde{e} = \tau(e_1 \vee e_2) = \overline{(\overline{\tau(e_1)} \wedge \overline{\tau(e_2)})}$
     Daraus ergibt sich mit der Induktionsvoraussetzung der korrekte $\tilde{B}$-Ausdruck:
     $\tilde{e} = \overline{(\overline{\tilde{e_1}} \wedge \overline{\tilde{e_1}})}$

   Daraus folgt, die Funktion τ tut das Gewünschte.

3. Eine obere Schranke ist $(2n + 1) * 2^n$.
   Begründung:

   (a) Ein boolscher Ausdruck zu f hat in disjunktiver Normalform maximal 2^n Monome mit $2^n - 1$ $\vee$-Zeichen.

   (b) Jedes dieser Monome hat n Literale mit durchschnittlich $\frac{n}{2}$ Verneinungen und $n - 1$ $\wedge$-Zeichen.

   (c) Durch die Transformation in einen $\tilde{B}$-Ausdruck kommt noch eine Verneinung der gesamten DNF und jeweils eine Verneinung aller 2^n Monome hinzu. Außerdem werden aus den $\vee$-Zeichen in 1. $\wedge$-Zeichen.

   (d) Daraus ergibt sich für die Länge m eines Monoms:
   $m = 1$ Verneinung des Monoms $+\frac{n}{2}$ Verneinungen der Literale $+(n - 1) \wedge$ Zeichen

(e) Daraus ergibt sich für eine obere Schranke s:
$s = 2^n s$ für die Monome $+1$ Verneinung des Polynoms $+(2^n - 1) \wedge$ Zeichen
$\Leftrightarrow s = 2^n(\frac{n}{2} + n + 1) \leq (2n+1) * 2^n$

Diese Abschätzung ist allerdings sehr grob, da ein Minimalpolynom zu f höchstens 2^{n-1} Monome hätte.

4. Die Größenodnung ändert sich nicht.

Lösung zu Aufgabe 1.4 [Monome und Implikanten]

1. $1, \overline{x_1}, \overline{x_2}, x_3, x_4, \overline{x_1}\ \overline{x_2}, \overline{x_1}\ x_3, \overline{x_1}\ x_4, \overline{x_2}\ x_3, \overline{x_2}\ x_4, x_3\ x_4,$
$\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3, \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_4, \overline{x_1}\ x_3\ x_4, \overline{x_2}\ x_3\ x_4$
2. Keines dieser Teilmonome ist ein Implikant von e.
3. Der einzige Primimplikant von e ist e selbst, da die Funktion aus nur einem Monom besteht.

Lösung zu Aufgabe 1.5 [Gleichungslösen]

1. Die Lösungen sind:
   - $\phi(x_1) = 0, \phi(x_2) = 0, \phi(x_3) = 0$
   - $\phi(x_1) = 1, \phi(x_2) = 0, \phi(x_3) = 0$
   - $\phi(x_1) = 0, \phi(x_2) = 1, \phi(x_3) = 0$
   - $\phi(x_1) = 0, \phi(x_2) = 0, \phi(x_3) = 1$
   - $\phi(x_1) = 1, \phi(x_2) = 0, \phi(x_3) = 1$
2. Die Lösungen sind:
   - $\phi(x_1) = 1, \phi(x_2) = 0$
   - $\phi(x_1) = 0, \phi(x_2) = 1$

Lösung zu Aufgabe 1.6 [Quine-McClusky]

1. f_1:

$$\begin{aligned} L_0 \quad = \quad & \{\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}\ \overline{x_4}, \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}\ x_4, \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3\ \overline{x_4}, \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3\ x_4, \\ & \overline{x_1}\ x_2\ \overline{x_3}\ \overline{x_4}, \overline{x_1}\ x_2\ \overline{x_3}\ x_4, \overline{x_1}\ x_2\ x_3\ \overline{x_4}, \overline{x_1}\ x_2\ x_3\ x_4, \\ & x_1\ \overline{x_2}\ x_3\ \overline{x_4}, x_1\ x_2\ \overline{x_3}\ \overline{x_4}, x_1\ x_2\ \overline{x_3}\ x_4, x_1\ x_2\ x_3\ \overline{x_4}, x_1\ x_2\ x_3\ x_4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 \quad = \quad & \{\overline{x_1}\ \overline{x_3}\ \overline{x_4}, \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_4}, \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}, \overline{x_1}\ \overline{x_3}\ x_4, \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_4, \\ & \overline{x_2}\ x_3\ \overline{x_4}, \overline{x_1}\ x_3\ \overline{x_4}, \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3, \overline{x_1}\ x_3\ x_4, x_2\ \overline{x_3}\ \overline{x_4}, \\ & \overline{x_1}\ x_2\ \overline{x_4}, \overline{x_1}\ x_2\ \overline{x_3}, x_2\ \overline{x_3}\ x_4, \overline{x_1}\ x_2\ x_4, x_2\ x_3\ \overline{x_4}, \\ & \overline{x_1}\ x_2\ x_3, x_2\ x_3\ x_4, x_1\ x_3\ \overline{x_4}, x_1\ x_2\ \overline{x_4}, x_1\ x_2\ \overline{x_3}. \\ & x_1\ x_2\ x_4, x_1\ x_2\ x_3\} \end{aligned}$$

$$P_1 = \emptyset$$

$$\begin{aligned} L_2 \quad = \quad & \{\overline{x_1}\ \overline{x_4}, \overline{x_1}\ \overline{x_3}, \overline{x_1}\ \overline{x_2}, \overline{x_1}\ x_4, x_3\ \overline{x_4}, \overline{x_1}\ x_3, \\ & x_2\ \overline{x_4}, x_2\ \overline{x_3}, \overline{x_1}\ x_2, x_2\ x_4, x_2\ x_3, x_1\ x_2\} \end{aligned}$$

$$P_2 = \emptyset$$

$$L_3 = \{\overline{x_1}, x_2\}$$

$$P_3 = \{x_3\ \overline{x_4}\}$$

$$L_4 = \emptyset$$

$$P_4 = \{\overline{x_1}, x_2\}$$

$$\Rightarrow P = \{x_3\ \overline{x_4}, \overline{x_1}, x_2\}$$

2. f_2:

$$L_0 = \{x_1\ x_2\ x_3\ \overline{x_4}, x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$$

$$L_1 = \{x_1\ x_2\ x_3\}$$

$$P_1 = \emptyset$$

$$L_2 = \emptyset$$

$$P_2 = \{x_1\ x_2\ x_3\}$$

$$\Rightarrow P = \{x_1\ x_2\ x_3\}$$