Lösungen zum 2. Übungsblatt Informatik II (SS 96)

Roland Fischer (mcrant@cscip.uni-sb.de)
Michael Mehl (mehl@dfki.uni-sb.de)

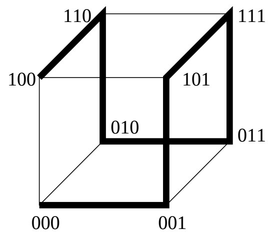
Aufgabe 2.1 [Hammingdistanz]

1. Seien $a = 00001000010$, $b = 11110111101$ und $c = 11111000000$. Dann gilt für die Hammingdistanz

   - $H(a,b) = 11$
   - $H(b,c) = 6$
   - $H(a,c) = 5$

2. Gesucht ist eine n-Bit Hammingkodierung für die Menge $M = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

i	$c(i)$	i	$c(i)$
0	000	4	011
1	001	5	010
2	101	6	110
3	111	7	100



3. Sei $c : \{0, \ldots 2^m - 1\} \to \{0,1\}^n$ eine n-Bit Hammingkodierung. Dann ist wegen der Kommutativität von H auch $c' : M \to \{0,1\}^n$ mit $c'(i) = c(2^m - 1 - i)$ eine Hammingkodierung. Betrachte die Funktion $c'' : \{0, \ldots, 2^{m+1} - 1\} \to \{0,1\}^{n+1}$ mit

$$c''(i) = \begin{cases} 0.c(i) & \text{, falls } i <= 2^m - 1 \\ 1.c'(i) & \text{, sonst} \end{cases} ,$$

wobei z.B $0.001 = 0001$ oder $1.101 = 1101$ ist. Offensichtlich gilt für die partiell definierten Funktionen 0.c(i) und 1.c'(i) die Bedingung $H(0.c(i), 0.c(i+1)) = 1$ und $H(1.c'(i+2^m), 1.c'(i+2^m+1)) = 1$. Außerdem gilt $H(0.c(2^m-1), 1.c'(2^m)) = H(0.c(2^m-1), 1.c(2^m-1)) = 1$ und $H(1.c'(2^{m+1}-1), 0.c(0)) = H(1.c(0), 0.c(0)) = 1$. Da $n+1$ minimal ist, gilt: c'' ist Hammingkodierung.

Aufgabe 2.2 [Graphen]

1. Die mathematische Darstellung (V_i, E_i) $i \in \{1,2,3\}$ der Graphen G_1, G_2 und G_3.

   - $G_1 = (V_1, E_1)$ mit $V_1 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ und

     $$E_1 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,4\},\\ \{3,5\},\{3,6\},\{3,7\},\{4,7\},\{5,6\},\{6,7\}\}$$

   - $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $V_2 = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7\}$ und

     $$E_2 = \{\{n_1,n_2\},\{n_1,n_3\},\{n_1,n_5\},\{n_1,n_6\},\{n_2,n_3\},\{n_2,n_4\},\\ \{n_3,n_4\},\{n_4,n_5\},\{n_4,n_7\},\{n_5,n_6\},\{n_5,n_7\},\{n_6,n_7\}\}$$

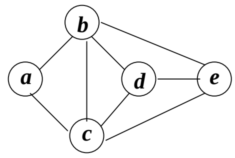
   - $G_3 = (V_3, E_3)$ mit $V_3 = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ und

     $$E_3 = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,d\},\{b,e\},\{c,d\},\\ \{c,f\},\{d,e\},\{d,f\},\{d,g\},\{e,g\},\{f,g\}\}$$

2. G_1 ist isomorph zu G_3, mit
$\varphi : V_1 \to V_3$ wie folgt

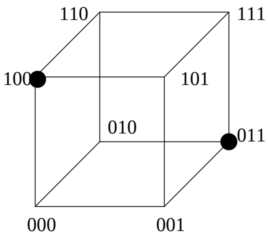
v	$\varphi(v)$	v	$\varphi(v)$
1	a	5	e
2	b	6	g
3	d	7	f
4	c		

3. Der Graph $G = (V, E)$ ohne sich kreuzende Kanten:



4. Beweis der Aussage (indirekt)
Sei $G' = (U', E')$ ein größerer Teilgraph von G als $\langle U \rangle_G$, der ebenfalls nur Knoten aus U enthält. Da $\langle U \rangle_G$ alle Knoten aus U enthält, muß gelten $U' \subseteq U$.
$\Rightarrow G'$ muß mehr Kanten als $\langle U \rangle_G$ besitzen.
$\Rightarrow \exists e \in E' - \{(u, v) \in E | u, v \in U\}$
Da alle Knoten aus U sind folgt $e \notin E \Rightarrow E' \not\subseteq E \Rightarrow G'$ ist nicht Teilgraph von $G \Rightarrow$ Widerspruch!

Aufgabe 2.3 [Primimplikanten und Minimalpolynome]



Man erhält für f_1 folgende Primimplikanten:
$\overline{x_1} x_2 x_3$ und $x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$

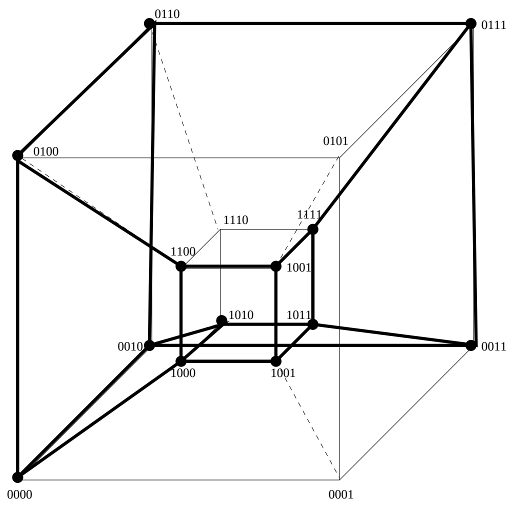
Die Primimplikantentafel von f_1

f_1	100	011
$\overline{x_1} x_2 x_3$	0	1
$x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$	1	0

Man sieht, beide Monome sind wesentlich. Es gibt keine dominierten Monome. Also erhält man folgendes Minimalpolynom
$\overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}$

Die Primimplikanten von f_2 ergeben sich aus den dick umrahmten Flächen. (Es gibt kein Volumen, das vollständig dick umrahmt ist.) Man erhält so folgende Primimplikanten

$x_1 \overline{x_2}$	$x_1 \overline{x_3}$
$x_1 x_4$	$\overline{x_1} x_3$
$\overline{x_1}\,\overline{x_4}$	$\overline{x_2} x_3$
$\overline{x_2}\,\overline{x_4}$	$x_3 x_4$
$\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	



Die Primimplikantentafel von f_2

f_2	0000	0010	0011	0100	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1111
$x_1\overline{x_2}$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
$x_1\overline{x_3}$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
x_1x_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
$\overline{x_1}x_3$	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{x_1}\,\overline{x_4}$	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{x_2}x_3$	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
$\overline{x_2}\,\overline{x_4}$	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
x_3x_4	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
$\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0

Es gibt weder wesentliche noch dominierte Monome in f_2. Minimalpolynom von f_2 ist $\overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_1\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2} \vee x_3x_4$. Das Minimalpolynom ist hier nicht eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2.4 [Minimalpolynome]

1. Sei $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ wie in der Aufgabenstellung definiert.

x	y	xfy
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Die Kommutativität ist direkt aus der Tabelle ersichtlich.

x	y	z	xfy	yfz	$(xfy)fz$	$xf(yfz)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Die Assoziativität ist direkt aus der Tabelle ersichtlich.

2. Die Träger von g sind 001, 010, 100 und 111. Primimplikanten sind $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$, $\overline{x_1}x_2\overline{x_3}$, $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ und $x_1x_2x_3$ und das einzige Minimalpolynom ist
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3$

3. Behauptung: $h(x_0,\ldots,x_n)$ besitzt genau ein Minimalpolynom, nämlich seine DNF.

   Behauptung1: Die $T(h) = \{a \in \{0,1\}^n \mid\ |a|_0 \text{ gerade}\}$
   Beweis: (Induktion über n)
   $n=1$: $h(x_0,x_1) = f(x_0,x_1) \ \Rightarrow\ T(h) = T(f) = \{00, 11\}$
   (Hinweis: $n=2$ siehe Teil 2)
   $n \to n+1$: Annahme: Behauptung1 gelte für n
   $h(x_0,\ldots,x_n,x_{n+1}) = h'(x_0,\ldots,x_n)fx_{n+1}$
   Aus der Definition von f folgt
   $T(h) = T(h') \times \{1\} \cup (\{0,1\}^n - T(h')) \times \{0\}$
   $\Rightarrow$ mit Hilfe der Induktionsannahme Behauptung1

   Behauptung2: Die Hammingdistanz zweier beliebiger verschiedener Trägerelemente ist größer als 1!
   Beweis (indirekt): Seien a, b zwei verschiedene Trägerelemente mit $h(a,b) = 1$. $(h(a,b) =$

$0 \Rightarrow a = b)$. Dann unterscheiden sich a und b an genau einer Stelle i. oBdA. sei $a[i] = 0$ und $b[i] = 1$. Dann gilt $|a|_0 = |b|_0 + 1$. Das heißt aber, daß a oder b eine ungerade Anzahl Nullen hat.$\Rightarrow$ Widerspruch zu Behauptung1! $\Rightarrow$ Behauptung2

Mit Hilfe der Träger läßt sich die Menge der Minterme bestimmen.
Aus Behauptung2 folgt, daß alle Minterme Primimplikanten sind. Da jeder Minterm genau einen Träger abdeckt, folgt, daß alle Primimplikanten wesentlich sind. Daraus folgt aber, daß die Disjunktion über alle Minterme gerade das einzige Minimalpolynom bildet. Das ist gerade die DNF. qed