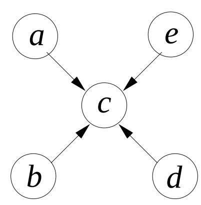
Lösungen zum 3. Übungsblatt Informatik II (SS 96)

Roland Fischer (mcrant@cscip.uni-sb.de)
Michael Mehl (mehl@dfki.uni-sb.de)

Lösung zu Aufgabe 3.1 [Gerichtete Graphen]

1. Bis auf Isomorphie ist der Graph G_1 eindeutig bestimmt.

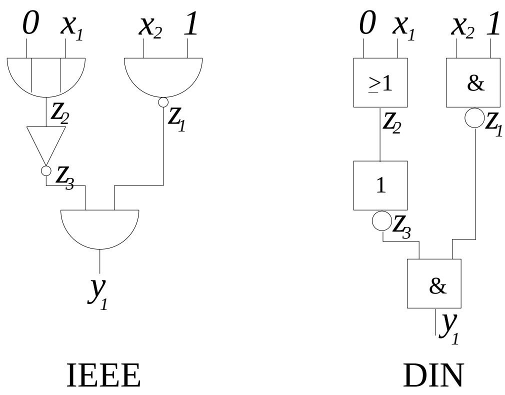
2. Quellen von G_1 sind a, b, d und e.
   Senke von G_1 ist c.
   Für die Tiefe gilt: $T(G_1) = 1$.



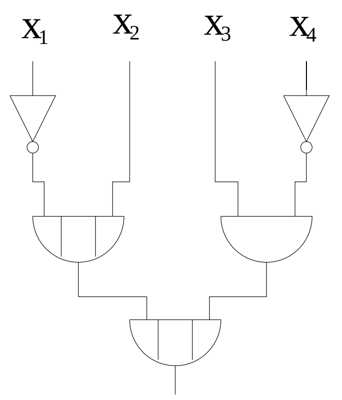
3. Gerichtete *zykelfreie* Graphen G mit indeg(G)=1 sind Wälder. Ohne die Einschränkung zykelfrei, kann es zusätzlich in jedem Baum eine Kante von einem Blatt zur Wurzel geben.

Lösung zu Aufgabe 3.2 [Schaltkreise]

1. Der Schaltkreis S_1 in IEEE und DIN Norm.

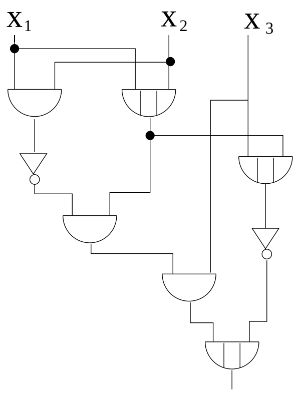


2. Aus Aufgabe 1.6 weiß man, daß $\overline{x_1}$, x_2 und $x_3\overline{x_4}$ die Primimplikanten von f_1 sind. Daraus ergibt sich das Minimalpolynom $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\overline{x_4}$, aus dem man leicht folgenden Schaltkreis konstruieren kann.



3.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



Aus der Wertetabelle erhält man die DNF. Durch umformen erhält man dann die im Schaltkreis realisierte Funktion.
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3 \equiv \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3} \vee (\overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2})x_3 \equiv$
$\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3} \vee (\overline{x_1 x_2} \wedge (x_1 \vee x_2))x_3$

4. Für Kosten und Tiefe der Schaltkreise gilt:
$C(S_1) = 4$ und $T(S_1) = 3$
$C(S_2) = 5$ und $T(S_2) = 3$
$C(S_3) = 8$ und $T(S_3) = 5$

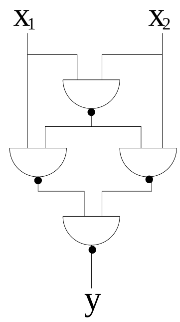
Lösung zu Aufgabe 3.3 [Gattergröße]
Für $g : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ gilt $C(g) \leq n2^n + n$
Man kann f in 33 Funktionen $f' : \{0,1\}^{65} \rightarrow \{0,1\}$ zerlegen.
$\Rightarrow C(f) \leq 33 \cdot (65 \cdot 2^{65} + 65)$
Für die benötigte Fläche gilt dann $A(f) \leq 8\mu m^2 \cdot C(f) \approx 6.33 \cdot 10^{23}\mu m^2 = 633000km^2$

Lösung zu Aufgabe 3.4 [$\oplus$]
1. Kommutativität und Assoziativität kann man direkt an folgender Wertetabelle ablesen.

x_1 x_2 x_3	$x_1 \oplus x_2$	$x_2 \oplus x_1$	$x_2 \oplus x_3$	$(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$	$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_2)$
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	1	1	1
0 1 0	1	1	1	1	1
0 1 1	1	1	0	0	0
1 0 0	1	1	0	1	1
1 0 1	1	1	1	0	0
1 1 0	0	0	1	0	0
1 1 1	0	0	0	1	1

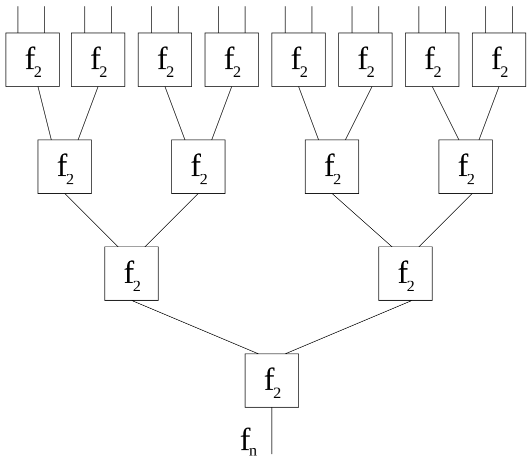
2. Es gilt:

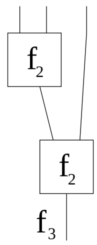
$$
\begin{aligned}
x_1 \oplus x_2 &\equiv \overline{x_1 x_2} \wedge (x_1 \vee x_2) \\
&\equiv \overline{x_1 x_2} x_1 \vee \overline{x_1 x_2} x_2 \\
&\equiv \overline{\overline{\overline{x_1 x_2} x_1} \wedge \overline{\overline{x_1 x_2} x_2}}
\end{aligned}
$$



d.h. f_2 kann man durch folgenden Schaltkreis, der nur aus NAND-Gattern besteht realisieren. Hiermit können dann f_3 oder f_n aufgebaut werden.
Kosten von f_2: 4
Tiefe von f_2: 3

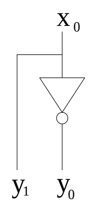
Für f_n kann man jetzt, da $\oplus$ assoziativ ist, die Berechnug baumartig aufspalten. Man erhält so für f_n eine Tiefe von $3 * \lceil \log_2 n \rceil$. Speziell für den Fall $n = 3$ heißt das: Tiefe(f_3)=6

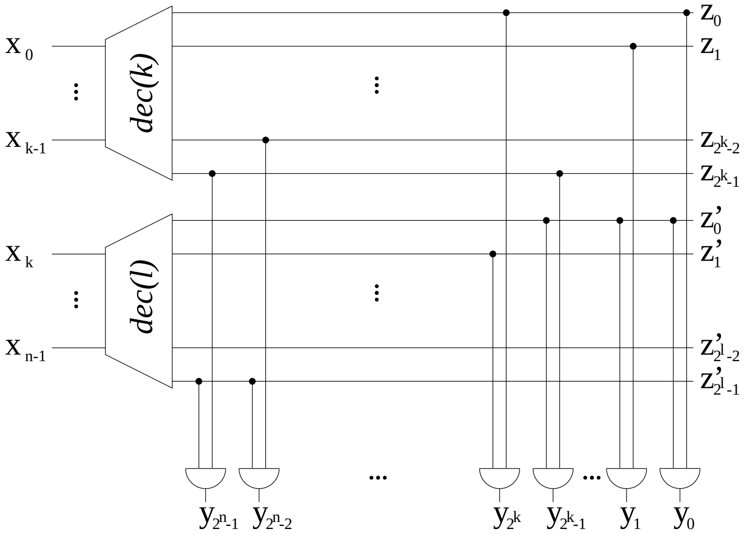




Lösung zu Aufgabe 3.5 [Bäume]
Die Scheme-Programme sind über WWW erhältlich.

Lösung zu Aufgabe 3.6 [Komplexität]
Die Existenz eines Dekoders mit Tiefe $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ zeige ich, indem ich ein Konstruktionsverfahren für einen solchen Dekoder angebe. Ausgehend von dem bereits bekannten 1-bit Dekoder, für den $T(dec(1)) = 1 = 0 + 1 = \lceil \log_2 1 \rceil + 1$ offensichtlich gilt, konstruiere ich einen n-bit Dekoder wie folgt. Für l und k gilt $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ und $l = n - k$, d.h. ich verteile die Eingabe auf 2 Dekoder halber Breite.





Bleibt noch zu zeigen, daß die Tiefe eines solchen n-bit Dekoders gerade $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ ist.
Beweis (Induktion ueber n)
Induktionsanfang: $n = 1$: Wurde weiter oben schon gezeigt!
Induktionsannahme: Für $m \leq n - 1$ gelte $T(dec(m)) = \lceil \log_2 m \rceil + 1$
Induktionsschritt: $n \to n + 1$:
$\exists k : 2^{k-1} < n \leq 2^k \Rightarrow 2^{k-2} < \frac{n}{2} \leq 2^{k-1} \Rightarrow 2^{k-2} < \lceil \frac{n}{2} \rceil \leq 2^{k-1}$ (*)
Außerdem gilt $k \geq l \Rightarrow T(dec(k)) \geq T(dec(l))$
Also gilt $T(dec(n)) = \max\{T(dec(k)), T(dec(l))\} + 1 \Rightarrow T(dec(n)) = T(dec(k)) + 1$
Nach Induktionsannahme gilt $T(dec(k)) = T(dec(\lceil \frac{n}{2} \rceil) = \lceil \log_2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil + 1$
Wegen (*) folgt $T(dec(k)) = \left\lceil \log_2 2^{k-1} \right\rceil + 1 = k - 1 + 1 = k$
Das heißt für den n-bit Dekoder: $T(dec(n)) = k + 1 = \left\lceil \log_2 2^k \right\rceil + 1$
Wieder wegen (*) folgt $T(dec(n)) = \lceil \log_2 n \rceil + 1$