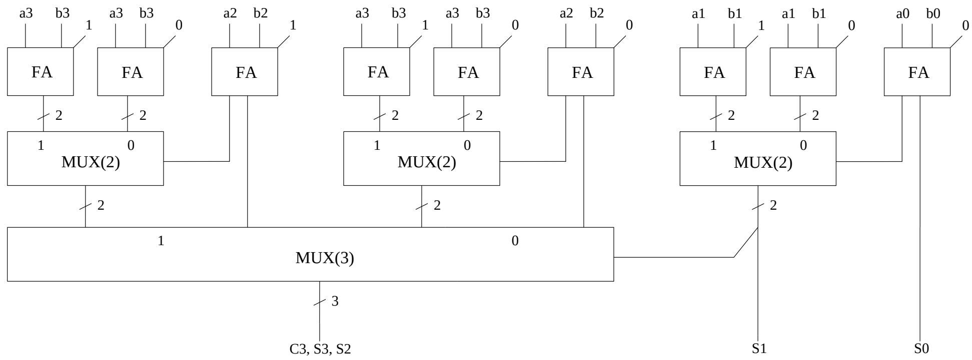
Lösungen zum 5. Übungsblatt Informatik II (SS 96)

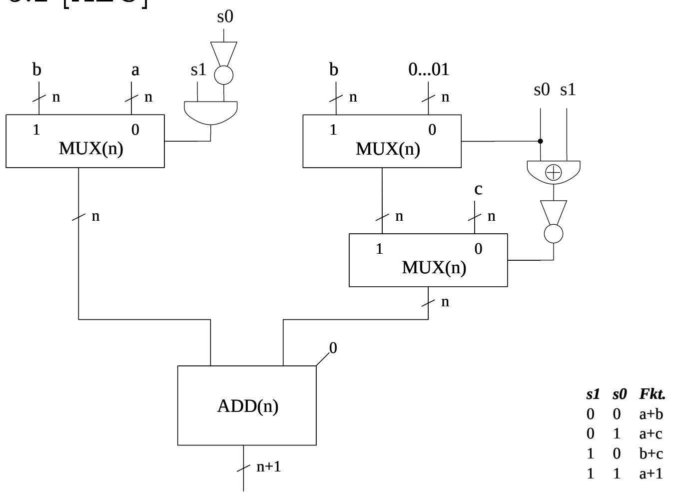
Joerg Fischer (jofis@wurzelausix.cs.uni-sb.de)
Michael Mehl (mehl@dfki.uni-sb.de)

Lösung zu Aufgabe 5.1 [Conditional Sum Addierer]



Folgende Optimierungen sind möglich: 1. Jeder Full Adder ($K(FA) = 5, T(FA) = 3$), der einen Carry mit Wert 0 bekommt wird durch einen Half Adder ($K(HA) = 2, T(HA) = 1$) ersetzt. 2. Jeder Full Adder, der einen Carry mit Wert 1 bekommt wird durch einen Incrementer ($K(INC) = 4, T(INC) = 3$) ersetzt.

Lösung zu Aufgabe 5.2 [ALU]



Lösung zu Aufgabe 5.3 [MUX]
Hinweis: Natürlich war in der Aufgabenstellung ein Fehler. Die Schaltfunktion m, welche die gleiche Funktion berechnen sollte, wie der Multiplexer (aus Keller/Paul S.196 Abb. 4.6(a)), muß korrekterweise wie folgt definiert sein:

$$m(a, b, s) = \begin{cases} a & : \quad s = 1 \\ b & : \quad s = 0 \end{cases}$$

Beweis: Aus der Konstruktion des Multiplexers geht hervor, daß m_i nur von a_i und b_i und s abhängt, und nicht von a_j, b_j oder m_j, mit $j \neq i$. Es bleibt zu zeigen, daß m_i korrekt berechnet wird. Aus der Konstruktion ergibt sich: $m_i = (a_i \wedge s) \vee (b_i \wedge \overline{s})$

<u>1. Fall:</u> $s = 0$ $\qquad m_i = (a_i \wedge 0) \vee (b_i \wedge 1) = 0 \vee b_i = b_i$

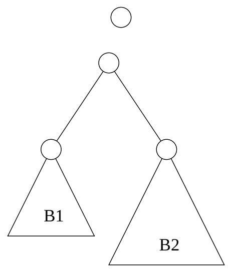
<u>2. Fall:</u> $s = 1$ $\qquad m_i = (a_i \wedge 1) \vee (b_i \wedge 0) = a_i \vee 0 = a_i$

$\square$

Lösung zu Aufgabe 5.4 [Binäre Bäume]

1. Zu zeigen: Ein binärer Baum B mit n Blättern hat $2n-1$ Knoten.

Beweis:



$\underline{n=1}$ trivial $\surd$

$\underline{n \to n+1}$ Sei #Blätter(B1)+#Blätter(B2)=$n+1$

#Knoten(B)

$\stackrel{\text{IV}}{=}$ (2#Blätter(B1)-1) + (2#Blätter(B2)-1) $+1$

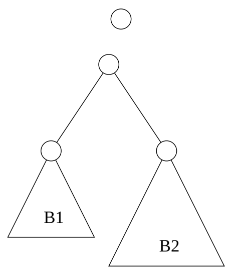
$=$ 2(#Blätter(B1)+#Blätter(B2)) $-2+1$

$= 2(n+1)-1\surd$

$\square$

2. Zu zeigen: Ein binärer Baum B mit n Blättern hat mindestens die Tiefe $\log(n)+1$.

Beweis:



$\underline{n=1}$ trivial $\surd$

$\underline{n \to n+1}$ Sei #Blätter(B1)+#Blätter(B2)=$n+1$

Sei $n_1 :=$ #Blätter(B1) und $n_2 :=$ #Blätter(B2)

$\stackrel{\text{IV}}{\Rightarrow}$ T(B1) $\geq \log(\ n_1)+1$ und T(B2) $\geq \log(\ n_2)+1$

T(B)=1+max{ T(B1),T(B2) }

$\geq 1+\max\{\ \log(\ n_1)+1,\ \log(\ n_2)+1\ \}$

$= 1+1+\max\{\ \log(n_1),\log(n_2)\}$

$= 2+\log(\max\{n_1, n_2\})$

$\stackrel{\star}{\geq} 2+\ \log(\ \lceil\frac{n+1}{2}\rceil)$

$\geq 2+\ \log(\ \frac{n+1}{2})$

$= 2+(\log(n+1)-1)$

$=\log(n+1)+1\surd$

$\star$) Lemma: $\max\{n_1, n_2\} \geq \lceil\frac{n+1}{2}\rceil$

Annahme: Behauptung falsch

$\Longrightarrow$ Sei $\max\{n_1, n_2\} < \lceil\frac{n+1}{2}\rceil$, dann gilt $n_1+n_2 < 2*\lceil\frac{n+1}{2}\rceil = n+1$

$\longrightarrow$ Widerspruch! $\surd$

$\square$

Lösung zu Aufgabe 5.5 [Carry-Lookahead]