3. Übungsblatt zu Informatik 1 WS 98/99

Andreas Rossberg, Prof. Gert Smolka

Abgabe: 13. November 1998 vor der Vorlesung

Hinweis: Ab jetzt gibt es Bonus-Aufgaben mit Sternchen $\star$. Mit der freiwilligen Bearbeitung dieser etwas schwereren Aufgaben kann man sein Punktekonto aufbessern.

Aufgabe 3.1 bitte per Email abgeben. Verwendet werden darf wieder nur MML plus Infixnotation.

Aufgabe 3.1: Schnelle Exponentiation (3 Punkte, per Email)

(a) Schreiben Sie eine rekursive Prozedur `odd(n)` in MML, die `1` zurück gibt, wenn `n` ungerade ist, und `0`, wenn `n` gerade ist.

(b) Eine schnelle Methode, den Wert von n^k für natürliche Zahlen zu berechnen, liefert folgende Gleichung:

$$n^k \quad = \quad \begin{cases} (n^{k/2})^2, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ n \cdot n^{k-1}, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Schreiben sie eine MML-Prozedur `fastexp(n,k)`, die diese Gleichung ausnutzt. Sie können dazu die Prozeduren `odd`, `quot`, und `quadriere` verwenden.

Aufgabe 3.2: Wörter und Bäume (2 Punkte)

Sei $N = \{\emptyset\}^*$. Dann ist die Längenfunktion für N eine Bijektion $N \to \mathbf{N}$. Definieren Sie eine Funktion $\otimes : N \times N \to N$, so dass für alle $u, v \in N$ gilt: $|u \otimes v| = |u| \cdot |v|$.

Aufgabe 3.3: Baumdarstellungen (5 Punkte)

(a) Zeichnen Sie einen binären Baum über $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, der die Tiefe 4, die Größe 9 und die Grenze 12340 hat. Jeder innere Knoten des Baumes soll mit 0 markiert sein.

(b) Wie viele solcher Bäume gibt es?

(c) Geben Sie Ihren Baum in Termdarstellung an.

(d) Geben Sie Ihren Baum in mathematischer Darstellung an, wobei Sie auch auf die bequeme Darstellung für Wörter ($x_1 \cdots x_n$ und ϵ) verzichten.

Aufgabe 3.4: Postfixprojektion (4 Punkte)

Analog zur Präfixprojektion gibt es auch eine Postfixprojektion, die die Marken der inneren Knoten den Projektionen der Unterbäume nachstellt, statt voranstellt.

(a) Definieren Sie die Postfixprojektion $\text{Post} : \text{Baum}(X) \to X^*$.

(b) Geben Sie Präfix- und Postfixprojektion Ihres Baumes aus Aufgabe 3.3(a) an.

Aufgabe 3.5: Binärbäume (5+3 Punkte)

Binärbäume über einem Alphabet X kann man direkt definieren als:

$$B = X + X \times B \times B$$

(a) Geben Sie Inferenzregeln an, die die Konstruktion von Binärbäumen in dieser Darstellung beschreiben.

(b) Geben Sie geeignete Definitionsgleichungen für die Wurzelmarke ω, die Größe $|\_|$, die Tiefe τ, und die Grenze γ von Binärbäumen in dieser Darstellung an.

(c⋆) Ein *vollständiger* Binärbaum ist ein Binärbaum, bei dem für alle inneren Knoten (x, b_1, b_2) gilt: $\tau(b_1) = \tau(b_2)$. Welche Größe hat ein vollständiger Binärbaum der Tiefe n? Wieviele Blätter hat er? Wieviele verschiedene vollständige Binärbäume der Tiefe n gibt es über dem Alphabet $X = \{1, 2\}$?

Aufgabe 3.6: Arithmetische Ausdrücke in Präfix-Notation (4 Punkte)

Die gängige Infix-Notation für arithmetische Ausdrücke ist nicht die einzig mögliche. Die folgende BNF-Grammatik definiert Ausdrücke in *Präfix-Notation*:

$$\begin{array}{lcl} c & ::= & 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \\ a & ::= & c \mid + \; a_1 \; a_2 \mid - \; a_1 \; a_2 \mid * \; a_1 \; a_2 \end{array}$$

(b) Welche der folgenden Wörter sind Phrasen für a? Geben Sie gegebenenfalls den Ableitungsbaum an.

(i) $+ \; + \; 3 \; 9 \; + \; 2 \; - \; 4 \; 3$

(ii) $3 \; + \; 1 \; - \; - \; 2 \; 5$

(iii) $+ \; * \; 2 \; - \; 1 \; - \; - \; 2 \; 5 \; 6$

(iv) $* \; * \; * \; * \; 7 \; 4 \; 1 \; 8 \; 4$

(c) Können Sie eine Phrase für a angeben, die genau so viele Operanden (Zahlen) wie Operatoren (+,−,∗) enthält? Warum nicht?

Aufgabe 3.7: Kontextfreie Grammatiken (5 Punkte)

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache L über dem Terminal-Alphabet $T = \{1, 2\}$ an, mit $L = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in \{1\}^*, w_2 \in \{2\}^*, |w_1| = |w_2|\}$.

Notieren Sie Ihre Grammatik auch in BNF-Darstellung.

(b) Geben Sie die kontextfreie Grammatik (N, T, R, x) von Micro ML an.

Aufgabe 3.8: Statische Semantik (4 Punkte)

Betrachten Sie den MML-Ausdruck

```
if x < y then f(x) else g(3,y)
```

(a) Geben Sie eine Typumgebung T an, unter der der Ausdruck gültig ist.

(b) Leiten Sie die Zulässigkeit des Ausdrucks unter dieser Umgebung mit Hilfe der Inferenzregeln der statischen Semantik von MML her.