6. Übungsblatt zu Informatik 1 WS 98/99

Andreas Rossberg, Prof. Gert Smolka

Abgabe: 4. Dezember 1998 vor der Vorlesung

Aufgabe 6.1: Eigenschaften der Konkatenation (4 Punkte)

Sei X eine Menge und $u, v, w \in X^*$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

(a) $w \cdot \epsilon = w$

(b) $|u \cdot v| = |u| + |v|$

Aufgabe 6.2: Größe balancierter Bäume (3 Punkte)

Ein *k-närer Baum* ist ein Baum, in dem alle inneren Knoten den Verzweigungsgrad k haben. Beweisen Sie, dass in jedem balancierten k-nären Baum b gilt:

$$|b| \quad = \quad \sum_{n=0}^{\tau(b)} k^n$$

Aufgabe 6.3: Rekursionsbaum der Fibonacci-Funktion (3 Punkte)

Sei $r(n)$ der Rekursionsbaum für $\mathit{fib}(n)$, wobei fib durch folgende Prozedur berechnet wird:

```
fun fib(n) = if n <= 1 then n else fib(n-1) + fib(n-2)
```

Beweisen Sie:

$$|\gamma(r(n))| \quad = \quad \mathit{fib}(n+1)$$

Aufgabe 6.4: Kosten der ggT-Prozedur (6 Punkte)

Erinnern Sie Sich an folgende Prozedur zur Berechnung des ggT (siehe Aufgabe 2.1):

```
fun ggT(m,n) = if      m = n then m
               else if m > n then ggT(m-n,n)
               else               ggT(m,n-m)
```

(a) Argumentieren Sie, dass die Laufzeit von `ggT(`m`,`n`)` für alle $m, n \in \mathbf{N}^+$ in $O(m+n)$ liegt.

(b) Sei $r(m,n)$ der Rekursionsbaum für `ggT(`m`,`n`)` und sei $m_0 \in \mathbf{N}^+$. Geben Sie je ein $n_0 \in \mathbf{N}^+$ an, so dass gilt:

  (i) $|r(m_0, n_0)| = 1$,

  (ii) $|r(m_0, n_0)| = m_0 + n_0 - 1$.

(c) Begründen Sie, warum die Laufzeit von `ggT(`m`,`n`)` nicht in $\Theta(m+n)$ ist.

Aufgabe 6.5: Ersetzungsmodell (3 Punkte)

Geben Sie einen Ausdruck a_0 an, so dass für die Prozedurumgebung

$$P \quad = \quad \{\, \texttt{f} \mapsto \texttt{fun f(x) =}\ a_0 \,\}$$

ein Ausdruck $a \notin \mathrm{Kon}$ existiert mit

$$\texttt{f(0)} \rightarrow_P^* a \quad \text{und es existiert kein } a' \text{ mit} \quad a \rightarrow_P a'$$

Dabei müssen Sie wegen Satz 3 aus Kapitel 5 des Skripts a_0 so wählen, dass die Deklaration `fun f(x) =` a_0 nicht für T_0 zulässig ist.
Geben Sie zwei verschiedene Möglichkeiten für a_0 an, so dass die Zulässigkeit einmal an Regel A.2 und einmal an Regel A.4 der statischen Semantik von MML scheitert.

Aufgabe 6.6: Ganzzahlige Division (5 Punkte)

Die Prozedur `quot` zur ganzzahligen Division natürlicher Zahlen sei gegeben als:

```
fun quot(m,n) = if m < n then 0 else 1 + quot(m-n,n)
```

Argumentieren Sie, dass diese Deklaration eine zulässige mathematische Definition für eine Funktion

$$quot \quad : \quad \mathbf{N} \times \mathbf{N} \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$$

ist, indem Sie die im Skript in Abschnitt 5.7 am Beispiel der Fakultät aufgeführten drei Bedingungen für *quot* formulieren. Überzeugen Sie Sich von der Gültigkeit der Bedingungen.

Aufgabe 6.7: Korrektheit der Addition (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Prozedur

```
fun plus(m,n) = if m = 0 then n else plus(m-1,n) + 1
```

eine korrekte Implementierung der Funktion

$$f \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$$
$$f(x,y) = x + y$$

ist. Wenden Sie dafür Satz 3 an und zeigen Sie dann die notwendige Gleichung durch Induktion.

Aufgabe 6.8: Korrektheit der Transformation auf Endrekursion (7 Punkte)

Seien die folgenden Deklarationen gegeben:

```
fun g(n,a1,a2,a3) = if n = 0 then a3 else g(n-1, 1*a1+2*a2+3*a3, a1, a2)
fun h(n)          = g(n,2,1,0)
```

(a) Zeigen Sie, dass die Deklarationen zulässige Definitionen sind für die Funktionen

$$\begin{aligned} g &\in \mathbf{N} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \\ h &\in \mathbf{N} \to \mathbf{Z} \end{aligned}$$

(b) Zeichnen Sie den Rekursionsbaum für `h(4)`.

(c) Geben Sie Laufzeit und Platzbedarf von `h` mit Θ an.

(d) Bei der Prozedur `h` handelt es sich um eine endrekursive Implementierung der durch die folgende (aus Aufgabe 5.4 bekannte) Deklaration definierten Funktion $f \in \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$:

```
fun f(n) = if n < 3 then n else 1*f(n-1) + 2*f(n-2) + 3*f(n-3)
```

Beweisen Sie $h = f$, indem Sie durch Induktion zeigen:

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \forall k \in \mathbf{N} : \qquad g(n, f(k+2), f(k+1), f(k)) = f(n+k)$$