7. Übungsblatt zu Informatik 1 WS 98/99

Andreas Rossberg, Prof. Gert Smolka

Abgabe: 11. Dezember 1998 vor der Vorlesung

Hinweis: Mehrere Aufgaben verwenden die ganzzahlige Division d und die Modulo-Funktion m aus dem Skript. Für die Programmieraufgaben können Sie Prozeduren `d` und `m`, die diese Funktionen berechnen, wie im Skript als gegeben ansehen.

Die Programme aus den Aufgaben 7.1 und 7.2 bitte zusätzlich per Email abgeben.

Aufgabe 7.1: Quersumme (6 Punkte)

Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist die Summe der einzelnen Ziffern dieser Zahl (in Dezimaldarstellung). So hat beispielsweise die Zahl 3754 die Quersumme 19.

(a) Geben Sie eine Definition der Quersummen-Funktion $quer : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ mithilfe der ganzzahligen Division d und der Modulo-Funktion m an (siehe Skript).

(b) Schreiben Sie eine MML-Prozedur `quer(n)`, die diese Funktion berechnet. Argumentieren Sie kurz, warum das der Fall ist.

(c) Schreiben Sie eine endrekursive Prozedur `querit(n,a)`, so dass

```
fun quer1(n) = querit(n,0)
```

die Funktion *quer* berechnet. Beweisen Sie diese Behauptung.

Aufgabe 7.2: Primzahlen (4 Punkte)

Eine Zahl $n \in \mathbf{N}$ heißt *Primzahl* gdw. $n > 1$ und $T(n) = \{1, n\}$. Schreiben Sie eine Prozedur `prime`, die die Funktion

$$prime \in \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$
$$prime(n) = \text{if } n \text{ Primzahl then } 1 \text{ else } 0$$

berechnet. Benutzen Sie dabei, dass

$$T(n) = \{1, n\} \quad \Leftrightarrow \quad \min\{k \in T(n) \mid k > 1\} = n$$

für alle $n > 1$ (also für Primzahlen der kleinste Teiler ausser 1 die Primzahl selbst ist). Verwenden Sie eine Hilfsprozedur.

Aufgabe 7.3: Geschachtelte Rekursion (4 Punkte)

Betrachten Sie folgende Funktionsdefinition:

$$b \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$
$$\begin{aligned} b(x,y) = {} & \text{if } x = 0 \text{ then } 0 \\ & \quad \text{else if } y = 0 \text{ then } 1 \\ & \quad\quad \text{else } b(b(x-1,y), y-1) \end{aligned}$$

Weisen Sie die Wohlfundiertheit dieser Definition nach, indem Sie eine geeignete wohlfundierte Relation und die notwendigen Bedingungen angeben (vergleiche mit der Ackermann-Funktion im Skript).

Aufgabe 7.4: Korrektheit und Laufzeit der Exponentiation (6 Punkte)

Die ganzzahlige Exponentiation ist die Funktion

$$e \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$
$$e(x, y) = x^y$$

(a) Beweisen Sie, dass die Prozedur (eine Variation von `fastexp` aus Aufgabe 3.1)

```
fun e(x,y) = if          y    = 0 then 1
             else if m(y,2) = 0 then e(x*x, d(y,2))
             else                    x * e(x, y-1)
```

die Funktion e berechnet.

(b) Sei

$$\mathtt{e}(x_n, y_n) \to \ldots \to \mathtt{e}(x_0, y_0)$$

ein Rekursionsbaum für `e` mit $n \geq 2$. Zeigen Sie:

$$\forall i \in \{2, \ldots, n\} : \; y_i \geq 2y_{i-2}$$

Sie müssen dazu eine Fallunterscheidung machen, die die verschiedenen möglichen Kombinationen von Rekursionsschritten behandelt.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathtt{e}(x, y)$ die Laufzeit $O(\log y)$ hat.

Aufgabe 7.5: Proposition über Halbierung (4 Punkte)

Sei $n \geq 1$ und $x_0, \cdots, x_n \in \mathbf{N}$ eine Kette

$$x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1 > x_0$$

mit $\forall k \in \{1, \cdots, n\} : x_k \geq 2x_{k-1}$. Beweisen Sie, dass gilt $n \leq 2 + \log_2 x_n$.

Aufgabe 7.6: Zulässige Definitionen (4 Punkte)

Geben Sie einen mathematischen Ausdruck a an, so dass

$$f \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$
$$f(x, y) = a$$

eine wohlgetypte, aber nicht wohlfundierte Definition ist. Wählen Sie a so, dass

1. bei jeder rekursiven Applikation mindestens eines der beiden Argumente kleiner wird, und
2. es Zahlen $x, y \in \mathbf{N}$ und eine Ersetzungskette

   $$f(x, y) \to \cdots \to f(x, y)$$

   gibt.

Geben Sie die Ersetzungskette für Ihren Ausdruck an.