5. Übungsblatt zu Programmierung (WS 1999/2000)

Andreas Rossberg, Prof. Gert Smolka

Abgabe: 26. November 1999 vor der Vorlesung

Hinweis: Die Aufgaben 5.3 bis 5.6 brauchen nur schriftlich abgegeben zu werden.

Aufgabe 5.1: Sortieren (4 Punkte)

Unter www.ps.uni-sb.de/courses/info1-ws99/uebung/sort.sml finden Sie verschiedene Sortierprozeduren mit dem Typ `('a * 'a -> bool) -> 'a list -> 'a list`. Schreiben Sie damit folgende Prozeduren:

(a) `f: int list list -> int list list` sortiert eine Liste von Listen ganzer Zahlen in der Reihenfolge ihrer größten Elemente. Zum Beispiel:

```
f [[0,3,2], [2,1], [4,0,0]] = [[2,1], [0,3,2], [4,0,0]]
```

(b) `g: (int -> int) list -> (int -> int) list` sortiert eine Liste von Prozeduren aufsteigend nach dem Wert, den die Prozeduren jeweils für das Argument `0` liefern.

Aufgabe 5.2: Ausführungszeit von Sortierprozeduren (6 Punkte)

Schreiben Sie eine Prozedur

```
bench: int * int -> (int list -> int list) -> unit
```

Diese Prozedur wird auf ein Paar (n,k) und eine aufsteigend sortierende Prozedur p angewendet. Sie erzeugt zunächst eine Liste $l =$ `[`$n, \cdots, 0$`]` und führt dann k-mal $p\,(l)$ aus. Die Ergebnislisten werden jeweils 'weggeworfen'. Verwenden Sie nur die bisher im Skript eingeführten Sprachkonstrukte. Deklarieren Sie Hilfsprozeduren innerhalb von `let`.

Testen Sie `bench` für $(n,k) = (10,10000),(100,1000),(1000,100)$ mit den verschiedenen Sortierprozeduren, die sie unter www.ps.uni-sb.de/courses/info1-ws99/uebung/sort.sml finden, und vergleichen Sie die Ausführungszeiten.

Aufgabe 5.3: Reihen (9 Punkte)

Gegeben sei $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$ und die folgenden induktiv definierten Funktionen:

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$f(n) = \text{if } n = 0 \text{ then } 1 \text{ else } 2n + 1 + f(n-1)$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$g(n) = \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else } n^2 + g(n-1)$

$h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$h(n) = \text{if } n = 0 \text{ then } 1 \text{ else } q^n + h(n-1)$

Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $f(n) = (n+1)^2$

(b) $g(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $h(n) = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Aufgabe 5.4: Exponentiation und Potenz (4 Punkte)

Beweisen Sie für alle natürlichen $n \geq 5$:

$$2^n \geq n^2$$

Sie können dazu die folgende Aussage als bewiesen annehmen:

$$\forall n \geq 5 : (n-2)^2 \geq 2$$

Aufgabe 5.5: Graphen (12 Punkte)

Zeichnen Sie die folgenden Graphen $G = (V, E)$. Geben Sie jeweils Größe und die Mengen der Quellen und Senken an und notieren Sie in einer Tabelle zu jedem Knoten

- den Ingrad und Ausgrad,
- die Menge der Vorgänger,
- die Menge der Nachfolger, sowie
- die Menge der erreichbaren Knoten.

Geben Sie außerdem zu jedem Graphen an, ob er

- zyklisch oder azyklisch,
- zusammenhängend oder gar stark zusammenhängend,
- ein Wald oder gar ein Baum

ist. Falls der Graph zyklisch ist, geben Sie einen Zyklus an. Ist der Graph ein Baum, so nennen sie die Wurzel.

(a) $V = \{1,2,3,4,5,6\}$
$E = \{(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(3,5),(6,2),(6,3)\}$

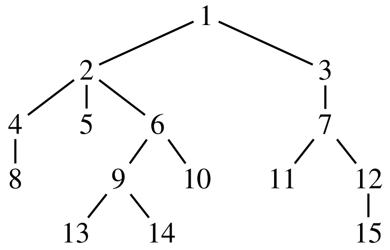
(b) $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$E = \{(2,7),(3,1),(3,6),(4,2),(4,3),(7,5)\}$

(c) $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
$E = \{(2,1),(2,6),(3,8),(4,4),(5,2),(5,7),(6,1),(7,6)\}$

(d) $V = \{1,2,3,4,5\}$
$E = \{(1,4),(2,4),(3,2),(3,5),(4,3),(5,1)\}$

Aufgabe 5.6: Bäume (10 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden Baum B:



(a) Geben Sie die mathematische Darstellung von B an.

(b) Was ist die Größe und die Tiefe von B?

(c) Was ist die Wurzel, was sind die Blätter, was die inneren Knoten von B? Geben Sie für jedes Blatt v einen Pfad von der Wurzel zu v an.

(d) Zeichnen Sie alle Teilbäume von B, deren Wurzel 7 ist.

(e) Zeichnen Sie den Teilbaum für 2 in B.

(f) Zeichnen Sie alle Unterbäume des Teilbaumes aus (e).