10. Übungsblatt zu Programmierung (WS 1999/2000)

Andreas Rossberg, Prof. Gert Smolka

Abgabe: Freitag, 14. Januar 2000 vor der Vorlesung

Aufgabe 10.1: Ersetzungsmodell (5 Punkte)

Gegeben seien die Prozeduren

```
fun f(k,m,n) = if m = 0 then k else f(k+n,m-1,n)
fun g(m,n)   = f(0,m,n)
```

(a) Geben Sie das Berechnungsprotokoll für den Ausdruck `g(2,5)` an.

(b) Geben Sie den Rekursionsbaum für den Ausdruck `g(4,3)` an.

(c) Beschreiben Sie durch eine Abstraktion eine Prozedur, die dieselbe Funktion berechnet wie `g` (ohne Rückgriff auf `f` und `g`).

Aufgabe 10.2: Größenordungen 1 (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $1 + 10 \log n \in O(\log n)$

(b) $\Theta(n^3 + n^{2,4}) = \Theta(n^3)$

(c) $3^n \in O(2^n)$

(d) $2^n \in O(3^n)$

Aufgabe 10.3: Größenordungen 2 (6 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen aus dem Skript:

(a) $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow g \in \Theta(f)$

(b) $O(f) = O(g) \Leftrightarrow f \in \Theta(g)$

Aufgabe 10.4: Laufzeit (4 Punkte)

Geben Sie jeweils eine möglichst einfache Prozedur `p: int -> int` an, so dass `p(`n`)` für $n \in \mathbb{N}$ die angegebene Laufzeit hat.

(a) $\Theta(1)$

(b) $\Theta(\log n)$

(c) $\Theta(n)$

(d) $\Theta(3^n)$

Aufgabe 10.5: Laufzeit und Termination 1 (10 Punkte)

Gegeben sei folgende Prozedur:

```
fun f(0,n) = n
  | f(m,0) = m
  | f(m,n) = if m > n then f(m+1,n-1) else f(m-1,n+1)
```

(a) Zeichnen Sie den Rekursionsbaum für `f(2,5)`.

(b) Ist `f` iterativ?

(c) Ist die Laufzeit von `f`(m,n) für $m,n \in \mathbb{N}$ in

(i) $O(1)$?

(ii) $O(n)$?

(iii) $O(m+n)$?

(iv) $\Theta(\min\{m,n\})$?

(d) Geben Sie eine Prozedur `g` an, die dieselbe Funktion wie `f` mit konstanter Laufzeit berechnet.

(e) Zeigen Sie, dass `f`(m,n) für $m,n \in \mathbb{N}$ terminiert. Geben Sie dazu die Terminationsbedingungen und eine geeignete wohlfundierte Relation an.

Aufgabe 10.6: Laufzeit und Termination 2 (10 Punkte)

Gegeben sei die Prozedur:

```
fun gcd(m,n) = if      m < n then gcd(m,n-m)
               else if m > n then gcd(m-n,n)
               else    m
```

(a) Geben Sie die Terminationsbedingungen für `gcd` an.

(b) Finden Sie eine wohlfundierte Ordnung, die die Termination von `gcd` zeigt.

(c) Bezeichne $R(m,n)$ die Größe des Rekursionsbaumes für `gcd`(m,n) und sei $m_0 \in \mathbb{N}^+$ gegeben. Geben Sie je ein $n_0 \in \mathbb{N}^+$ an, so dass gilt:

(i) $R(m_0,n_0) = 1$

(ii) $R(m_0,n_0) = m_0 + n_0 - 1$

(d) Hat `gcd`(m,n) für $m,n \in \mathbb{N}^+$ die Laufzeit $O(m+n)$?

(e) Begründen Sie, warum die Laufzeit von `gcd`(m,n) nicht in Θ(m+n) ist.

Anmerkung: Die Prozedur `gcd` berechnet den größten gemeinsamen Teiler (*greatest common divisor*) zweier positiver natürlicher Zahlen.

Aufgabe 10.7: Transformation in iterative Form und Korrektheit (7 Punkte)

Gegeben sei die Prozedur `sum: (int -> int) * int -> int`:

```
fun sum(f,0) = f 0
  | sum(f,n) = f n + sum(f,n-1)
```

(a) Schreiben Sie eine iterative Prozedur `sum': int * (int -> int) * int -> int`, so dass gilt:

$$\forall f \in \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ sum(f,n) = sum'(0,f,n)$$

(b) Beweisen Sie die Behauptung aus (a). Beweisen Sie dazu zunächst:

$$\forall f \in \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall a \in \mathbb{Z}\colon\ sum'(a,f,n) = a + sum'(0,f,n)$$

Aufgabe 10.8: Transformation in iterative Form (4 Punkte)

Gegeben sei die Prozedur `split: 'a list -> 'a list * 'a list`:

```
fun split  []     = ([],[])
  | split(x::xs) = let val (ys,zs) = split xs in
                        (x::zs,ys)
                   end
```

Schreiben Sie eine iterative Prozedur `split': 'a list -> 'a list * 'a list`, die dieselbe Funktion berechnet wie `split`. Verwenden Sie eine Hilfsprozedur.