7. Übungsblatt zu Logik, Semantik und Verifikation SS 2001

Prof. Dr. Gert Smolka, Dr. Christian Schulte
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv01/

Abgabe: 28. Mai in der Vorlesungspause

Aufgabe 7.1: Grundregeln (5) Sei die Menge $Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch die folgenden Inferenzregeln definiert:

$$\frac{}{\langle 1, 1\rangle \in Q} \qquad \frac{\langle n, m\rangle \in Q \qquad n' = n+1 \qquad m' = m + 2n + 1}{\langle n', m'\rangle \in Q}$$

(a) Geben Sie die durch die Inferenzregeln definierte Grundregelmenge R an.

(b) Geben Sie die Mengen $\hat{R}^0(\emptyset)$, $\hat{R}^1(\emptyset)$, $\hat{R}^2(\emptyset)$, $\hat{R}^3(\emptyset)$ und $\hat{R}^4(\emptyset)$ an.

Aufgabe 7.2: Approximation von Funktionen (5) Gegeben sei die folgende rekursive Prozedurdeklaration:

```
fun max(n,m) = if n=0 then m
               else if m=0 then n
                    else 1 + max(n-1,m-1)
val max : int * int -> int
```

(a) Geben Sie das der Deklaration entsprechende Funktional `maxFun` an.

(b) Geben Sie die ersten vier Approximationen für `max` an.

Aufgabe 7.3: Grundregeln und Fixpunkte (5) Sei die Menge $M \subseteq \mathbb{Z}$ durch die folgenden Inferenzregeln definiert:

$$\frac{}{4 \in M} \qquad \frac{x \in M \qquad y \in M \qquad z = x + y \mod 5}{z \in M}$$

(a) Geben Sie die durch die Inferenzregeln definierte Grundregelmenge R an.

(b) Geben Sie die Mengen $\hat{R}^0(\emptyset)$, $\hat{R}^1(\emptyset)$, $\hat{R}^2(\emptyset)$ und $\hat{R}^3(\emptyset)$ an.

(c) Geben Sie die Menge $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \hat{R}^i(\emptyset)$ an.

(d) Geben Sie den kleinsten Fixpunkt von $\hat{R}$ an.

(e) Geben Sie das kleinste $P \subseteq \mathbb{Z}$ an mit $\hat{R}(P) \subseteq P$.

Aufgabe 7.4: Funktionen und Fixpunkte (5) Gegeben sei eine endliche Menge M mit m Elementen. Wieviele Funktionen $f \in M \to M$ gibt es, die genau m Fixpunkte haben? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7.5: Punktweise Ordnungen für Funktionen (5) Sei X eine Menge und $\langle Y, \leq\rangle$ eine VPO mit einem kleinsten Element $\bot$. Wir definieren auf $X \to Y$ eine partielle Ordnung:

$$f \leq f' \iff \forall x \in X: \ f(x) \leq f'(x)$$

(a) Sei $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ ($\forall i \in \mathbb{N}: \ f_i \in X \to Y$) eine Kette. Geben Sie die kleinste obere Schranke $f \in X \to Y$ dieser Kette an.

(b) Geben Sie das kleinste Element der VPO $\langle X \to Y, \leq\rangle$ an.

Aufgabe 7.6: Triviale Ordnung mit $\bot$ (5) Sei X eine Menge, $\bot \notin X$ und $X_\bot = X \cup \{\bot\}$. Wir definieren auf $X_\bot$ eine partielle Ordnung

$$x \leq x' \iff x = \bot \text{ oder } x = x'$$

Zeigen Sie, dass $\langle X_\bot, \leq\rangle$ eine VPO mit einem kleinsten Element ist.

Aufgabe 7.7: Stationäre VPOs (5) Sei $\langle X, \leq\rangle$ eine partielle Ordnung, so dass für jede aufsteigende Kette $x_0 \leq x_1 \leq \cdots$ ein n existiert, so dass $\forall i \geq n: \ x_i = x_n$. Zeigen Sie:

(a) $\langle X, \leq\rangle$ ist eine VPO.

(b) Jede monotone Funktion $X \to X$ ist stetig.

Aufgabe 7.8: Regeln mit unendlich vielen Prämissen (5) Sei X eine Menge und R eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{P}(X) \times X$. Wir definieren

$$\hat{R} \in \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

$$\hat{R}(A) = \{x \mid \exists B: \ B \subseteq A \text{ und } \langle B, x\rangle \in R\}$$

Geben Sie eine einelementige Menge $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ an, so dass $\hat{R}$ nicht stetig ist (bezüglich der VPO $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$). Beweisen Sie diese Aussage.

Aufgabe 7.9: VPOs ohne kleinste Elemente (5) Geben Sie eine vollständige partielle Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}$ an, so dass die VPO $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ kein kleinstes Element hat. Geben Sie eine bezüglich dieser VPO $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ stetige Funktion $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die keinen kleinsten Fixpunkt hat.

Aufgabe 7.10: Unstetige Funktionen (5) Gegeben sei die VPO $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$. Geben Sie eine Funktion $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ an, die bezüglich $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$ monoton, aber nicht stetig ist.