



## 11. Übungsblatt zu Logik, Semantik und Verifikation SS 2001

Prof. Dr. Gert Smolka, Dr. Christian Schulte

[www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv01/](http://www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv01/)

---

Abgabe: Donnerstag, 28. Juni in der Vorlesungspause

---

### Aufgabe 11.1: Fragen zur Berechenbarkeit (6)

- (a) Ist die leere Menge entscheidbar?
- (b) Gibt es endliche Teilmengen von  $\mathbb{Z}$ , die unentscheidbar sind?
- (c) Geben Sie eine Menge  $M \subseteq \mathbb{Z}$  an, sodass  $M$  nicht testbar und  $\overline{M}$  testbar ist.
- (d) Geben Sie eine Menge  $M \subseteq \mathbb{Z}$  an, sodass weder  $M$  noch  $\overline{M}$  testbar sind.
- (e) Ist die Menge  $\{f \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_\perp \mid f \text{ berechenbar}\}$  abzählbar?
- (f) Wieviel nicht abzählbare Teilmengen von  $\mathbb{Z}$  gibt es?
- (g) Ist die Paarungsfunktion  $\text{pair} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}^+$  injektiv? Ist sie surjektiv?

### Aufgabe 11.2: Abzählbarkeit (8)

- (a) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  nicht abzählbar ist.
- (b) Sei  $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ abzählbar}\}$ . Zeigen Sie, dass  $\mathcal{A}$  nicht abzählbar ist.
- (c) Beweisen Sie Proposition 9.3.1 aus dem Skript.

**Aufgabe 11.3: Halteproblem (8)** Sei  $\#H_5 = \{\#c \mid c \in \text{Com} \wedge \mathcal{F}[[c]](5) \neq 5\}$ . Zeigen Sie, dass  $\#H_5$  unentscheidbar ist.

## IML

Programmieren in IMP ist äußerst mühsam. Wir betrachten daher eine idealisierte Version von SML, die wir IML nennen. IML kann mit beliebig großen ganzen Zahlen rechnen. IML hat keine Referenzen, Ausnahmen und Strukturen. Mit Standardtechniken für die Implementierung von Programmiersprachen kann man in IML geschriebene Prozeduren automatisch in Kommandos von IMP übersetzen, sodass die Prozedur dieselbe Funktion  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_\perp$  berechnet wie das Kommando. Das gilt für Prozeduren mit den Typen

```
int → int
int → bool
int → unit
```

wobei wir die folgenden Korrespondenzen annehmen

$$\begin{aligned} \text{true} &\mapsto 1 \\ \text{false} &\mapsto 0 \\ () &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Eine Prozedur  $p$  vom Typ  $\text{int} \rightarrow \text{bool}$  heißt *Entscheider* für eine Menge  $M \subseteq \mathbb{Z}$  genau dann, wenn  $p$  für alle Argumente terminiert und genau dann  $\text{true}$  liefert, wenn das Argument in  $M$  ist.

Eine Prozedur  $p$  vom Typ  $\text{int} \rightarrow \text{unit}$  heißt *Tester* für eine Menge  $M \subseteq \mathbb{Z}$  genau dann, wenn  $p$  für  $x \in \mathbb{Z}$  genau dann terminiert, wenn  $x \in M$ .

#### Aufgabe 11.4: Gödelisierung in IML (10)

(a) Schreiben Sie in IML Prozeduren

$$\begin{aligned} \text{pair} &: \text{int} * \text{int} \rightarrow \text{int} \\ \text{fst} &: \text{int} \rightarrow \text{int} \\ \text{second} &: \text{int} \rightarrow \text{int} \\ \text{ispair} &: \text{int} \rightarrow \text{bool} \end{aligned}$$

die die für die Gödelisierung erforderlichen Eigenschaften besitzen.

(b) Sei

$$\begin{aligned} \text{Aus} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z} \uplus \mathbb{N} \uplus \text{Aus} \times \text{Aus} \\ \#\text{Aus} &\stackrel{\text{def}}{=} \{\#a \mid a \in \text{Aus}\} \end{aligned}$$

Schreiben Sie einen Entscheider  $\text{aus}$  für  $\#\text{Aus}$ .

**Aufgabe 11.5: Konstruktion von Testern in IML (10)** Sie sollen den konstruktiven Teil der Beweise von Satz 9.5.3 und Korollar 9.6.2 in IML programmieren. Nehmen Sie dabei an, dass Prozeduren

$$\begin{aligned} \text{com} &: \text{int} \rightarrow \text{bool} \\ \text{assn} &: \text{int} \rightarrow \text{bool} \\ \text{zuw} &: \text{int} \rightarrow \text{int} \\ \text{seq} &: \text{int} * \text{int} \rightarrow \text{int} \\ \text{neg} &: \text{int} \rightarrow \text{int} \end{aligned}$$

gegeben sind, für die gilt:

- $\text{com}$  ist ein Entscheider für  $\#\text{Com}$ .
- $\text{assn}$  ist ein Entscheider für  $\#\text{Assn}$ .

- $\forall n \in \mathbb{Z} : \text{zuw}(n) = \#(X_0 := n)$
- $\forall c_1, c_2 \in \text{Com} : \text{seq}(\#c_1, \#c_2) = \#(c_1; c_2)$
- $\forall A \in \text{Assn} : \text{neg}(\#A) = \#(\neg A)$

(a) Schreiben Sie eine Prozedur

$$p : (\text{int} \rightarrow \text{unit}) \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{unit})$$

die zu einem Tester für  $\overline{\#H_0}$  einen Tester für  $\overline{\#H}$  liefert.

(b) Schreiben Sie eine Prozedur

$$q : (\text{int} \rightarrow \text{unit}) \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{unit})$$

die zu einem Tester für  $\overline{\#G}$  einen Tester für  $\#G$  liefert.

**Aufgabe 11.6: First mit IMP (8)** Geben Sie ein  $c \in \text{Com}$  an mit

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z} : \mathcal{F} \llbracket c \rrbracket (\text{pair}(n_1, n_2)) = n_1$$