



12. Übungsblatt zu Logik, Semantik und Verifikation SS 2001

Prof. Dr. Gert Smolka, Dr. Christian Schulte
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv01/

Abgabe: Donnerstag, 5. Juli in der Vorlesungspause

Aufgabe 12.1: Eigenschaften von Quantoren (4) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen im Allgemeinen falsch sind. Geben Sie Gegenbeispiele an mit $A, B \in \text{Assn}$.

- (a) $\models \forall X \exists Y A \Rightarrow \exists Y \forall X A$.
- (b) $\models (\forall X A \Rightarrow B) \Rightarrow \forall X (A \Rightarrow B)$.

Aufgabe 12.2: Alternative Vereinfachungsregeln (12) Sie sollen Vereinfachungsregeln für prädikatenlogische Klauselmengen angeben, die disjunktiv mit existenzieller Quantifizierung interpretiert werden.

- Eine Struktur $\mathcal{A}$ heißt Modell einer Klausel C genau dann, wenn $\mathcal{A}$ zu jeder Formel in C passt, und

$$\exists \sigma \in \text{Val}_{\mathcal{A}} \forall A \in C : \mathcal{A} \models A \sigma = 1$$

- Eine Struktur $\mathcal{A}$ heißt Modell einer Klauselmenge S genau dann, wenn $\mathcal{A}$ Modell einer Klausel in S ist.
- Eine Klauselmenge S heißt allgemeingültig genau dann, wenn jede Struktur, die zu jeder Formel in S passt, ein Modell von S ist.

(a) Geben Sie Vereinfachungsregeln für Klauselmengen S mit den folgenden Eigenschaften an:

1. Wenn $S \xrightarrow{d} S'$, dann ist S genau dann allgemeingültig, wenn S' allgemeingültig ist.
2. S ist literal genau dann, wenn es kein S' mit $S \xrightarrow{d} S'$ gibt.
3. Wenn S endlich ist, dann gibt es keine unendliche Kette

$$S \xrightarrow{d} S_1 \xrightarrow{d} S_2 \xrightarrow{d} S_3 \xrightarrow{d} \dots$$

(b) Geben Sie eine Ableitung von

$$\{\{\exists x (\neg \exists y (\neg p(x, y) \wedge \neg q(x)) \wedge \exists y \neg p(x, y))\}\} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} S'$$

an mit S' literal.

Aufgabe 12.3: Unifikatoren (4) Gegeben sind die Terme

$$\begin{aligned} t_1 &= f(x, g(y, y), z) \\ t_2 &= f(g(h(u), y), u, h(x)) \end{aligned}$$

- (a) Geben Sie einen prinzipalen Unifikator θ für t_1 und t_2 an.
- (b) Geben Sie zwei allgemeinste Unifikatoren $\theta_1 \neq \theta_2$ für t_1 und t_2 an, die nicht prinzipal sind.
- (c) Geben Sie zwei Unifikatoren $\theta_1 \neq \theta_2$ für t_1 und t_2 an, die nicht allgemeinst sind.

Aufgabe 12.4: Berechnung prinzipialer Unifikatoren (10) Gegeben sind die Terme

$$\begin{aligned}t_1 &= g(x, y, z) \\t_2 &= g(h(y, z), a, f(z)) \\t_3 &= g(h(y, y), h(u, u), f(x)) \\t_4 &= g(z, z, f(a))\end{aligned}$$

Entscheiden Sie, ob die Terme t_i und t_j ($i, j \in \{1, 2, 3, 4\} \wedge i \neq j$) unifizierbar sind. Falls t_i und t_j unifizierbar sind, geben Sie einen prinzipialen Unifikator an. Falls t_i und t_j nicht unifizierbar sind, geben Sie eine Ableitung $\{t_i \doteq t_j\} \xrightarrow{u} \cdots \xrightarrow{u} E$ an, so dass E einen Konflikt enthält.

Aufgabe 12.5: Exponentiell grosse Unifikate (8) Geben Sie zwei unifizierbare Terme t_n und t'_n mit allgemeinstem Unifikator θ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an, so dass

$$\gamma(\theta(t_n)) \in \Theta(2^n)$$

Dabei ist $\gamma \in \text{Ter} \rightarrow \mathbb{N}$ als Größe eines Termes wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= 1 \\ \gamma(f(t_1, \dots, t_n)) &= 1 + \sum_{i=1}^n \gamma(t_i)\end{aligned}$$

Aufgabe 12.6: Resolution (12) Gegeben sind die Klauselmengen

$$\begin{aligned}S_1 &= \{\{p(a)\}, \{\neg p(x), p(f(x))\}, \{\neg p(f(f(y)))\}\} \\ S_2 &= \{\{p(x, x)\}, \{p(y, x), \neg p(x, y)\}, \{\neg p(x, y), p(x, z), \neg p(y, z)\}\} \\ S_3 &= \{\{p(f(x), y), p(z, f(z))\}, \{\neg q(f(a))\}, \{\neg p(x, f(x)), q(x)\}\}\end{aligned}$$

Entscheiden Sie für jede Menge S_i ($i \in \{1, 2, 3\}$), ob S_i erfüllbar ist. Falls S_i erfüllbar ist, geben Sie ein Modell von S_i an. Fall S_i unerfüllbar ist, zeigen Sie mit einem Resolutionsgraphen, dass $\emptyset \in \text{Res}(S_i)$ ist.