Kapitel 1

Mathematische Objekte

In diesem Kapitel wiederholen wir Begriffe und Notationen für grundlegende mathematische Objekte wie Tupel, Mengen, Relationen und Funktionen. Außerdem erklären wir die Beweistechnik wohlfundierte Induktion.

1.1 Tupel und Mengen

Wir gehen davon aus, dass es *mathematische Objekte* gibt. Die *natürlichen Zahlen*

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

sind Beispiele für mathematische Objekte. Statt von mathematischen Objekten sprechen wir im Folgenden auch einfach von *Objekten*.

Objekte können mit Tupel- und Mengenbildung zu größeren Objekten zusammengefasst werden.

Ein *n-stelliges Tupel* ist ein zusammengesetztes Objekt der Form

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$$

das aus $n \geq 0$ Objekten $x_1, \ldots, x_n$ besteht. Die Objekte $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnet man als *Konstituenten* des Tupels. Die Konstituenten eines Tupels sind geordnet. Dasselbe Objekt kann mehrfach als Konstituente eines Tupels auftreten, zum Beispiel 1 in $\langle 1, 1 \rangle$. Es gibt genau ein nullstelliges Tupel $\langle\rangle$, das man als *leeres Tupel* bezeichnet. Zweistellige Tupel bezeichnet man als *Paare* und dreistellige Tupel als *Tripel*. Tupel mit keiner oder mit mindestens zwei Komponenten schreiben wir auch mit runden Klammern:

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

Die Konstituenten eines Tupels bezeichnet man auch als *Komponenten*. Die Konstituente x_i eines Tupels $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ bezeichnet man als die *i-te Komponente* des Tupels.

Objekte können auch zu *Mengen* zusammengefasst werden. Beispielsweise kann man die natürlichen Zahlen 0 und 1 zu der Menge $\{1, 2\}$ zusammenfassen. Man kann aber auch alle natürliche Zahlen zu einer Menge zusammenfassen. Mengen unterscheiden sich von Tupeln in drei Punkten: Für die Konstituenten einer Menge ist keine Ordnung festgelegt; dasselbe Objekt kann nicht mehrfach als Konstituente einer Menge auftreten; und Mengen können unendlich viele Konstituenten haben.

Die Konstituenten einer Menge werden als *Elemente der Menge* bezeichnet. Man sagt auch, dass eine Menge ihre Elemente *enhält*. Man schreibt $x \in X$, um zu sagen, dass das Objekt x ein Element der Menge X ist. Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält. Diese Menge heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.

Eine Menge heißt *endlich*, wenn sie nur endlich viele Elemente enthält. Die Anzahl der verschiedenen Elemente einer endlichen Menge X heißt *Kardinalität* der Menge und wird mit $|X|$ bezeichnet. Beispielsweise gilt $|\{1, 2, 3\}| = 3$. Eine *n-elementige Menge* ($n \geq 0$) ist eine endliche Menge mit der Kardinalität n. Zu $n \geq 0$ verschiedenen Objekten $x_1, \ldots, x_n$ gibt es genau eine n-elementige Menge, die genau diese Objekte als Elemente enthält. Diese Menge schreibt man als $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

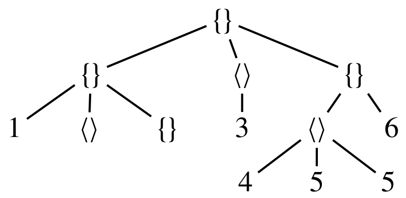
Wir nehmen an, dass es genau drei verschiedene Arten von mathematischen Objekten gibt: Zahlen, Tupel und Mengen. Jedes mathematische Objekt gehört zu genau einer dieser drei Arten.

Wir unterscheiden zwischen *atomaren und zusammengesetzten Objekten*. Zahlen, das leere Tupel und die leere Menge sind atomare Objekte. Alle anderen Objekte sind zusammengesetzt.

Die Art und Weise, mit der ein Objekt aus kleineren Objekten zusammengesetzt ist, lässt sich anschaulich durch einen Baum darstellen. Beispielsweise hat das Objekt

$$\{\{1,\ \langle\rangle,\ \emptyset\},\ \ \langle 3\rangle,\ \ \{\langle 4,\ 5,\ 5\rangle,\ \ 6\}\}$$

die *Baumdarstellung*



In der Baumdarstellung erscheinen die Konstituenten eines zusammengesetzten Objektes als Unterbäume.

Seien x und y zwei mathematische Objekte. Wir schreiben

$$x \rhd y$$

wenn x ein zusammengesetztes Objekt ist und y eine Konstituente von x ist.

Wir erlauben nur *wohlfundierte* Objekte. Wohlfundiertheit bedeutet, dass man nach endlich vielen Abstiegen zu einer Konstituente stets auf ein atomares Objekt stößt. Formal gesprochen bedeutet Wohlfundiertheit, dass es *keine* unendliche Folge $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots$ von Objekten gibt, für die gilt:

$$x_1 \rhd x_2 \rhd x_3 \rhd \ \cdots$$

Aus der Wohlfundiertheitsannahme folgt sofort, dass es keine Menge gibt, die sich selbst enthält. Insbesondere folgt, dass es keine Menge gibt, die alle Mengen als Elemente enthält.[1]

Ein Objekt y heißt *Teilobjekt* eines zusammengesetzten Objektes x genau dann, wenn es $n \geq 1$ Objekte $x_1, \dots,\ x_n$ wie folgt gibt:

$$x = x_1 \rhd x_2 \rhd x_3 \rhd \ \cdots \ \rhd x_n = y$$

Ein Teilobjekt x von y heißt *echtes Teilobjekt* von y, wenn $x \neq y$ gilt.

Ein Objekt heißt *finitär* genau dann, wenn es nur endlich viele Teilobjekte hat. Finitäre Objekte können durch endliche Bäume dargestellt werden.

Eine Menge heißt *rein*, wenn alle ihre Teilobjekte Mengen sind.

Die Konstituenten eines zusammengesetzten Objektes bezeichnet man auch als seine *Unterobjekte*.

[1] Die Wohlfundiertheitsannahme sorgt also dafür, dass die Russelsche Antinomie nicht anwendbar ist.

1.2 Aussagen

Um mathematische Aussagen übersichtlich formulieren zu können, verwenden wir die folgenden logischen Notationen (A und B sind Aussagen):

$A \wedge B$	A und B	*Konjunktion*
$A \vee B$	A oder B	*Disjunktion*
$\neg A$	nicht A	*Negation*
$A \Rightarrow B$	aus A folgt B	*Implikation*
$A \Leftarrow B$	A folgt aus B	*Implikation*
$A \iff B$	A genau dann, wenn B	*Äquivalenz*
$\forall x \in X : A$	für alle $x \in X$ gilt A	*Universelle Quantifizierung*
$\exists x \in X : A$	es existiert ein $x \in X$ sodass A	*Existentielle Quantifizierung*

Eine Aussage der Form $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \Rightarrow B$ schreiben wir manchmal auch als *Inferenzregel*:

$$\frac{A_1 \quad \ldots \quad A_n}{B}$$

Wir bezeichnen dann $A_1, \ldots, A_n$ als die *Prämissen* und B als die *Konklusion* der Regel.

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Aussagen A und B gültig:

$$\begin{array}{rcll}
A & \iff & \neg A \Rightarrow \text{Widerspruch} & \textit{tertium non datur} \\
A \Rightarrow B & \iff & \neg B \Rightarrow \neg A & \textit{Kontraposition} \\
\neg(A \wedge B) & \iff & \neg A \vee \neg B & \\
\neg(A \vee B) & \iff & \neg A \wedge \neg B & \\
\neg(A \Rightarrow B) & \iff & A \wedge \neg B & \\
\neg \forall x \in X : A & \iff & \exists x \in X : \neg A & \\
\neg \exists x \in X : A & \iff & \forall x \in X : \neg A &
\end{array}$$

Für die Gleichheit von zwei Mengen X und Y gilt:

$$X = Y \iff (\forall x \in X : x \in Y) \wedge (\forall y \in Y : y \in X)$$

Für die Gleichheit von zwei Tupeln gilt:

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \iff x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n$$

1.3 Begriffe und Notationen für Mengen

Die *Inklusionsbeziehung* zwischen zwei Mengen X und Y ist wie folgt definiert:

$$X \subseteq Y \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x \in X : x \in Y$$

Wenn $X \subseteq Y$ gilt, sagt man, dass X eine *Teilmenge* von Y ist; weiter sagt man, dass Y eine *Obermenge* von X ist. Zwischen Gleichheit und Inklusion von Mengen besteht der folgende Zusammenhang:

$$X = Y \quad \Longleftrightarrow \quad X \subseteq Y \;\wedge\; Y \subseteq X$$

Die *strikte Inklusionsbeziehung* zwischen zwei Mengen X und Y ist wie folgt definiert:

$$X \subsetneq Y \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad X \subseteq Y \;\wedge\; X \neq Y$$

Zwei Mengen X und Y heißen *disjunkt* genau dann, wenn sie kein gemeinsames Element haben.

Seien X und Y zwei Mengen. Der *Schnitt*, die *Vereinigung* und die *Differenz* von X und Y sind die wie folgt definierten Mengen:

$$\begin{array}{lcll} X \cap Y & \overset{\text{def}}{=} & \{ z \mid z \in X \;\wedge\; z \in Y \} & \qquad\qquad \textit{Schnitt} \\ X \cup Y & \overset{\text{def}}{=} & \{ z \mid z \in X \;\vee\; z \in Y \} & \qquad\qquad \textit{Vereinigung} \\ X - Y & \overset{\text{def}}{=} & \{ z \mid z \in X \;\wedge\; z \notin Y \} & \qquad\qquad \textit{Differenz} \end{array}$$

Dabei steht $z \notin Y$ für $\neg\, z \in Y$ (z ist kein Element von Y).

Die *Potenzmenge*

$$\mathcal{P}(X) \overset{\text{def}}{=} \{ Y \mid Y \subseteq X \}$$

einer Menge X ist die Menge aller Teilmengen von X. Wenn X eine endliche Menge mit n Elementen ist, dann ist $\mathcal{P}(X)$ eine endliche Menge mit 2^n Elementen. Mit

$$\mathcal{P}_{\mathit{fin}}(X) \overset{\text{def}}{=} \{ Y \mid Y \subseteq X \;\wedge\; Y \text{ endlich} \}$$

bezeichnen wir die Menge aller endlichen Teilmengen der Menge X.

Das *Produkt* von $n \geq 2$ Mengen $X_1, \dots, X_n$ ist die Menge

$$X_1 \times \cdots \times X_n \;\overset{\text{def}}{=}\; \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n \}$$

aller n-stelligen Tupel, deren i-te Komponente jeweils aus X_i ist. Für ein Produkt $X \times \cdots \times X$ schreibt man kürzer X^n, wobei $n \geq 2$ die Anzahl der Faktoren angibt.

Die *Summe* von $n \geq 2$ Mengen $X_1, \ldots, X_n$ ist die Menge

$$X_1 \uplus \cdots \uplus X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \langle i, x \rangle \mid i \in \{1, \ldots, n\} \;\wedge\; x \in X_i \,\}$$

Die Elemente einer Summe sind also Paare $\langle i, x \rangle$, die aus einer sogenannten *Variantennummer i* und einem Element x aus dem entsprechenden *Summanden X_i* bestehen. Statt von Summen spricht man auch von *disjunkten Vereinigungen*.

In Standard ML kann man Produkte und Summen mit Typen beschreiben. Beispielsweise können wir die Menge

$$\mathbb{Z} \uplus \mathbb{Z} \uplus (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})$$

durch den Typ

```
datatype t = A of int | B of int | C of int * int
```

beschreiben. Dabei werden die Elemente der Summe mithilfe der Konstruktoren `A`, `B`, `C` beschrieben.

Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

$\mathbb{N}$	$\stackrel{\text{def}}{=}$	$\{0, 1, 2, \ldots\}$	*Natürliche Zahlen*
$\mathbb{N}^+$	$\stackrel{\text{def}}{=}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$	*Positive natürliche Zahlen*
$\mathbb{Z}$	$\stackrel{\text{def}}{=}$	$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	*Ganze Zahlen*

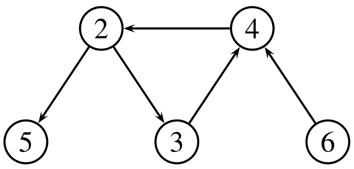
1.4 Binäre Relationen

Eine *n-stellige Relation* ist eine Menge, deren Elemente n-stellige Tupel sind. Eine *binäre Relation* ist eine zweistellige Relation. Eine *binäre Relation auf einer Menge X* ist eine Teilmenge von $X \times X$.

Hier ist ein Beispiel für eine binäre Relation:

$$\{(2,3),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,2),\ (6,4)\}$$

Man kann eine binäre Relation durch einen Graphen darstellen. Dabei beschreibt jedes Paar der Relation eine Kante des Graphens. Die obige Relation können wir durch den folgenden Graphen darstellen:



Binäre Relationen bezeichnet man oft mit Infixsymbolen wie beispielsweise $\leq$. Statt $(x, y) \in \leq$ schreibt man dann kürzer und lesbarer $x \leq y$.

Sei r eine binäre Relation. Der *Definitionsbereich* (englisch „domain“) und der *Wertebereich* (englisch „range“) von r sind wie folgt definiert:

$$\mathit{Dom}\ r \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid \exists y\colon (x, y) \in r \,\}$$
$$\mathit{Ran}\ r \stackrel{\text{def}}{=} \{\, y \mid \exists x\colon (x, y) \in r \,\}$$

Der Definitionsbereich der obigen Relation ist die Menge $\{2, 3, 4, 6\}$, und der Wertebereich ist $\{2, 3, 4, 5\}$. Aus der Sicht der Graphdarstellung besteht der Definitionsbereich gerade aus allen Knoten, von denen eine Kante ausgeht, und der Wertebereich aus allen Knoten, auf die eine Kante zeigt.

Eine binäre Relation kann man sich als eine Zuordnung vorstellen, die jedem Element ihres Definitionsbereichs mindestens ein Element ihres Wertebereichs zuordnet. Diese Zuordnung wird durch die Kanten der Graphdarstellung anschaulich beschrieben. Die obige Relation ordnet der Zahl 2 die Zahlen 5 und 3 zu.

Die *Komposition* $r \circ r'$ von zwei binären Relationen r und r' ist die wie folgt definierte binäre Relation:

$$r \circ r' \stackrel{\text{def}}{=} \{\, (x, z) \mid \exists (x, y) \in r\colon\ (y, z) \in r' \,\}$$

Die *Umkehrrelation* r^{-1} für eine binäre Relation r ist die die wie folgt definierte binäre Relation:

$$r^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, (x, y) \mid (y, x) \in r \,\}$$

Offensichtlich gilt $(r^{-1})^{-1} = r$. Statt Umkehrrelation sagt man auch *inverse Relation*.

Eine binäre Relation r heißt

- *transitiv*, wenn $r \circ r \subseteq r$.
- *symmetrisch*, wenn $r = r^{-1}$.
- *antisymmetrisch*, wenn $\forall (x, y) \in r \cap r^{-1}\colon x = y$.

Unsere Beispielsrelation hat keine diese Eigenschaften.

Sei X eine Menge. Die *Identität von* X ist die wie folgt definierte binäre Relation:

$$I_X \overset{\text{def}}{=} \{ (x, x) \mid x \in X \}$$

Offensichtlich gilt $I_X = I_X^{-1} = I_X \circ I_X$. Außerdem ist I_X transitiv, symmetrisch und antisymmetrisch.

Eine binäre Relation r auf X heißt *reflexiv* (bezogen auf X), wenn $I_X \subseteq r$.

1.5 Funktionen

Eine binäre Relation r heißt *funktional*, wenn zu jedem $x \in \mathit{Dom}\, r$ genau ein $y \in \mathit{Ran}\, r$ existiert mit $(x, y) \in r$. Unsere Beispielsrelation ist nicht funktional, da sie 2 sowohl 5 als auch 3 zuordnet.

Eine *Funktion* ist eine funktionale binäre Relation.

Proposition 1.5.1 *Wenn f und g Funktionen sind, dann ist $f \circ g$ eine Funktion.*

Eine endliche Funktion $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ kann man als eine Tabelle

x_1	y_1
x_2	y_2
$\ldots$	$\ldots$
x_n	y_n

darstellen, bei der die linksstehenden Einträge $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind. Beispielsweise kann man die Funktion $\{(3, 4), (5, 7), (7, 10)\}$ durch die folgende Tabelle darstellen:

3	4
5	7
7	10

Eine endliche Funktion $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ schreiben wir auch als

$$\{x_1 \mapsto y_1, \ldots, x_n \mapsto y_n\}$$

Sei f eine Funktion. Wenn $(x, y) \in f$ gilt, sagt man, dass f für das *Argument* x das *Ergebnis* y liefert. Das Ergebnis von f für x bezeichnet man mit $f(x)$. Statt $(x, y) \in f$ schreibt man meistens $f(x) = y$.

Seien X und Y Mengen. Wir werden die folgenden Notationen benutzen:

$$X \rightharpoonup Y \stackrel{\text{def}}{=} \{\, f \mid f \text{ Funktion mit } Dom\ f \subseteq X \text{ und } Ran\ f \subseteq Y \,\}$$

$$X \to Y \stackrel{\text{def}}{=} \{\, f \in X \rightharpoonup Y \mid Dom\ f = X \,\}$$

$$X \stackrel{fin}{\rightharpoonup} Y \stackrel{\text{def}}{=} \{\, f \in X \rightharpoonup Y \mid f \text{ endliche Menge} \,\}$$

Die Elemente von $X \rightharpoonup Y$ bezeichnet wir als *Funktionen* von X nach Y. Die Elemente von $X \to Y$ bezeichnet wir als *totale Funktionen* von X nach Y. Die Elemente von $X \stackrel{fin}{\rightharpoonup} Y$ bezeichnet wir als *endliche Funktionen* von X nach Y.

Statt $f \in X \to Y$ schreiben wir auch $f : X \to Y$ oder „f Funktion $X \to Y$“.

Proposition 1.5.2 *Sei $f \in X \to Y$ und $g \in Y \to Z$. Dann $f \circ g \in X \to Z$ und*

$$\forall x \in X\colon\ (f \circ g)(x) = g(f(x))$$

Injektive und bijektive Funktionen

Eine binäre Relation r heißt *injektiv*, wenn die Umkehrrelation r^{-1} funktional ist. Wenn f eine injektive Funktion ist, bezeichnet man f^{-1} als die *Umkehrfunktion* oder die *inverse Funktion für* f.

Proposition 1.5.3 *Wenn r und r' injektive binäre Relationen sind, dann ist $r \circ r'$ eine injektive binäre Relation.*

Proposition 1.5.4 *Für jede Funktion f sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *f injektiv.*
2. $f \circ f^{-1} = I_{Dom\, f}$.
3. $f^{-1} \circ f = I_{Ran\, f}$.
4. $\forall x, y \in Dom\ f\colon\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Eine Funktion $f \in X \rightharpoonup Y$ heißt bezogen auf X und Y

- *total* genau dann, wenn $Dom\ f = X$.
- *partiell* genau dann, wenn $Dom\ f \neq X$.
- *surjektiv* genau dann, wenn $Ran\ f = Y$.
- *bijektiv* genau dann, wenn f injektiv, total und surjektiv ist.

Bijektive Funktionen bezeichnet man auch als *Bijektionen*. Die Umkehrfunktion einer Bijektion $X \to Y$ ist eine Bijektion $Y \to X$. Für jede Menge X ist I_X eine Bijektion $X \to X$.

Proposition 1.5.5 *Für jede Funktion $f \in X \to Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *f bijektiv.*
2. *$f^{-1} \in Y \to X$.*
3. *Es existiert eine Funktion $g \in Y \to X$ mit $f \circ g = I_X$ und $g \circ f = I_Y$.*

Proposition 1.5.6 *Seien $f \in X \to Y$ und $g \in Y \to X$ Funktionen mit $f \circ g = I_X$ und $g \circ f = I_Y$. Dann sind f und g bijektiv und $f^{-1} = g$ und $g^{-1} = f$.*

Isomorphie

Seien X und Y Mengen. Wenn eine Bijektion $X \to Y$ existiert, bezeichnen wir X und Y als *isomorph* und schreiben $X \cong Y$.

Proposition 1.5.7 *Wenn X eine endliche Menge mit $X \cong Y$ ist, dann ist auch Y endlich und $|X| = |Y|$.*

Proposition 1.5.8 *Wenn X und Y endliche Mengen sind, dann ist $X \to Y$ eine endliche Menge mit $X \to Y \cong Y^{|X|}$ und $|X \to Y| = |Y|^{|X|}$.*

Lambda-Notation

Oft ist es bequem, Funktionen mithilfe der sogenannten Lambda-Notation zu beschreiben:

$$\begin{array}{ll}
\lambda\, n \in \mathbb{N}\,.\, n & \text{für} \quad \{\,(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\,\} \\
\lambda\, x \in \mathbb{Z}\,.\, x^2 & \text{für} \quad \{\,(x, y) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y = x^2\,\} \\
\lambda\, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\,.\, x + y & \text{für} \quad \{\,((x, y), z) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge z = x + y\,\}
\end{array}$$

In jeder Zeile wird links und rechts dieselbe Funktion beschrieben. Dabei verwendet die linke Spalte Lambda-Notation und die rechte Spalte die übliche Mengen-Notation. Hier ist ein weiteres Beispiel, das zusätzlich die Konditional-Notation benutzt:

$$\lambda\, x \in \mathbb{Z}\,.\, (\text{if } x \geq 0 \text{ then } x \text{ else } -x) \quad \text{für} \quad \{\,(x, y) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y = |x|\,\}$$

Klammersparende Notation

Oft ist es bequem, bei Funktionsapplikationen Klammern einzusparen. Wir schreiben

$$\begin{aligned} f\ x \quad &\text{für} \quad f(x) \\ f\ x\ y \quad &\text{für} \quad (f\ x)(y) \end{aligned}$$

Diese Konvention ist Ihnen bereits aus Standard ML vertraut. Auch bei der Notation $X \to Y$ (alle totale Funktionen von X nach Y) kann man Klammern einsparen:

$$X \to Y \to Z \quad \text{für} \quad X \to (Y \to Z)$$

Mehrstellige Funktionen

Streng genommen hat jede Funktion genau ein Argument. Es ist trotzdem üblich, Funktionen des Typs

$$X \times Y \to Z$$

als zweistellig zu bezeichen und zwischen dem ersten und zweiten Argument zu unterscheiden. Da

$$X \times Y \to Z \quad \cong \quad X \to Y \to Z$$

gilt, kann man zweistellige Funktionen auch mit dem Typ

$$X \to Y \to Z$$

darstellen. Die Darstellung gemäß $X \times Y \to Z$ bezeichnet man als *kartesisch*, und die Darstellung gemäß $X \to Y \to Z$ als *kaskadiert*. Die kaskadierte Darstellung ist mit der klammersparenden Notation eleganter als die kartesische Darstellung. Die Programmiersprache Standard ML unterstützt beide Darstellungen.

Adjunktion von Funktionen

Die *Adjunktion* von zwei Funktionen f und g ist wie folgt definiert:

$$f + g \quad = \quad \lambda x \in Dom\ f \cup Dom\ g \,\textbf{.}\ \text{if } x \in Dom\ g \text{ then } g(x) \text{ else } f(x)$$

Statt

$$f + \{x \mapsto y\}$$

schreibt man auch

$$f[y/x]$$

(lies „f mit y für x“).

1.6 Äquivalenzrelationen

Sei X eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation für* X ist eine binäre Relation $\sim$ auf X, die reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Für alle $x \in X$ nennt man die Menge

$$[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{\, y \in X \mid y \sim x \,\}$$

die *Äquivalenzklasse von* x. Die Menge aller Äquivalenzklassen

$$X/_{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, [x] \mid x \in X \,\}$$

nennt man den *Quotienten von* X *nach* $\sim$.

Proposition 1.6.1 *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation für X. Dann gilt:*

(1) $\forall Y \in X/_{\sim}\colon\ \emptyset \neq Y \subseteq X$

(2) $\forall Y, Z \in X/_{\sim}\colon\quad Y \neq Z \;\Rightarrow\; Y \cap Z = \emptyset$

(3) $\forall x \in X\ \exists Y \in X/_{\sim}\colon\quad x \in Y$

Anschaulich sagt man, dass eine Äquivalenzrelation eine Menge in ein System von nichtleeren, paarweise disjunkten Äquivalenzklassen *partitioniert*.

1.7 Partielle Ordnungen

Das Paradebeispiel für eine partielle Ordnung ist die Inklusionsbeziehung „$\subseteq$" für Mengen. Offensichtlich gilt für beliebige Mengen X, Y, Z:

- $X \subseteq X$.
- $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$.
- $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$.

Sei X eine Menge. Eine *partielle Ordnung für* X ist eine binäre Relation $\leq$ auf X, die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Eine *totale Ordnung für* X ist eine partielle Ordnung $\leq$ für X, die für alle x, $y \in X$ die folgende Bedingung erfüllt: $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Sei M eine Menge. Dann ist die *Inklusionsordnung*

$$X \leq Y \stackrel{\text{def}}{\iff} X \subseteq Y \wedge Y \subseteq M$$

eine partielle Ordnung für $\mathcal{P}(M)$. Wenn M mindestens zwei Elemente enthält, dann ist die Inklusionsordnung keine totale Ordnung für $\mathcal{P}(M)$.

Die übliche Ordnung für Zahlen liefert totale Ordnungen für $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Eine *partiell geordnete Menge* ist ein Paar $(X, \leq)$ aus einer nichtleeren Menge X und einer partiellen Ordnung $\leq$ für X.

Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $Y \subseteq X$. Ein $x \in Y$ heißt *maximales Element* von Y, wenn für alle $y \in Y$ gilt: $x \leq y \Rightarrow x = y$. Ein $x \in Y$ heißt *größtes Element* von Y, wenn für alle $y \in Y$ gilt: $y \leq x$. *Minimale* und *kleinste Elemente* von Y sind analog definiert.

Proposition 1.7.1 *Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Dann hat jede Teilmenge $Y \subseteq X$ höchstens ein größtes und höchstens ein kleinstes Element.*

Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Ein $x \in X$ heißt *obere Schranke einer Teilmenge $Y \subseteq X$*, wenn für alle $y \in Y$ gilt: $y \leq x$. Ein $x \in X$ heißt *Supremum* oder *kleinste obere Schranke einer Teilmenge $Y \subseteq X$*, wenn x eine obere Schranke von Y ist und für alle oberen Schranken z von Y gilt: $x \leq z$.

Untere Schranken und *größte untere Schranken* sind analog definiert. Größte untere Schranken bezeichnet man auch als *Infima*.

Betrachten Sie die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Die übliche Ordnung von $\mathbb{Z}$ ist eine totale Ordnung für $\mathbb{Z}$. Die Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ der natürlichen Zahlen hat das Infimum 0 und keine obere Schranke. Die maximale Teilmenge $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ hat weder eine obere noch eine untere Schranke.

Sei M eine Menge. Betrachten Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ mit der Inklusionsordnung. Für jede Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$ gilt: $\bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$ ist das Infimum von $\mathcal{A}$, und $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ ist das Supremum von $\mathcal{A}$.

Proposition 1.7.2 *Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Dann hat jede Teilmenge $Y \subseteq X$ höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum.*

Beweis Sei $Y \subseteq X$ und seien a und b Suprema für Y. Da a eine kleinste obere Schranke und b eine obere Schranke von Y ist, folgt $a \leq b$. Analog erhalten wir $b \leq a$. Also $a = b$. Die Eindeutigkeit von Infima folgt ähnlich. $\square$

1.8 Wohlfundierte Induktion

Induktion ist eine wichtige Beweistechnik, die in vielen Varianten auftritt. Wir formulieren hier eine allgemeine Variante von Induktion, die als wohlfundierte

Induktion bezeichnet wird. Die meisten Induktionsvarianten sind Spezialfälle der wohlfundierten Induktion.

Induktion ist eine aus dem Beweisprinzip tertium non datur (ein Drittes gibt es nicht, Beweis durch Widerspruch) abgeleitete Beweistechnik.[2]

Eine binäre Relation $\succ$ heißt *terminierend*, wenn es keine unendliche Folge $x_0, x_1, x_2, \dots$ von Objekten gibt mit $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \succ x_{n+1}$. Mit der Notation $x \succ y$ verbinden wir die bildhafte Vorstellung, dass x in einem gewissen Sinne größer ist als y. Terminierung bedeutet, dass es keine unendliche absteigende Kette $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ \cdots$ gibt. Statt von einer terminierenden Relation spricht man auch von einer *wohlfundierten* Relation.

Beispiel $\{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x > y \}$ ist eine terminierende Relation auf $\mathbb{N}$. $\square$

Beispiel Für jede Menge X ist $\{ (x, y) \in X \times X \mid x \rhd y \}$ eine terminierende Relation auf X. $\square$

Lemma 1.8.1 *Sei $\succ$ eine terminierende Relation auf X und Y eine nichtleere Teilmenge von X. Dann $\exists y \in Y\ \forall x \in X : y \succ x \Rightarrow x \notin Y$.*

Beweis Durch Widerspruch. Gelte $\forall y \in Y\ \exists x \in X : y \succ x \wedge x \in Y$. Dann $\forall y \in Y\ \exists x \in Y : y \succ x$. Da Y nichtleer ist, können wir eine unendliche absteigende Kette konstruieren. Widerspruch. $\square$

Sei X eine Menge. Wohlfundierte Induktion ist eine Technik, mit der man zu einer Teilmenge $P \subseteq X$ beweisen kann, dass $P = X$ gilt. Um wohlfundierte Induktion anwenden zu können, benötigt man eine terminierende Relation auf X, die man in diesem Zusammenhang als *Induktionsordnung* bezeichnet.[3]

Proposition 1.8.2 (Wohlfundierte Induktion) *Sei $\succ$ eine terminierende Relation auf X und $P \subseteq X$. Dann $P = X$, wenn gilt:*

$$\forall x \in X\colon\ \{ y \in X \mid x \succ y \} \subseteq P \ \Rightarrow\ x \in P$$

Beweis Gelte $\forall x \in X\colon\ \{ y \in X \mid x \succ y \} \subseteq P \ \Rightarrow\ x \in P$. Wir zeigen $X \subseteq P$ durch Widerspruch. Sei $X - P \neq \emptyset$. Lemma 1.8.1 liefert ein $y \in X - P$ mit $\forall x \in X : y \succ x \Rightarrow x \notin X - P$. Also $\{ x \in X \mid y \succ x \} \subseteq P$. Also folgt $y \in P$ nach Voraussetzung. Widerspruch. $\square$

[2] Es gibt mathematische Logiken, die tertium non datur als Beweisprinzip ausschließen und dafür gewisse Formen von Induktion als primitive Beweisprinzipien einschließen.

[3] Der Begriff Induktionsordnung beißt sich mit dem Begriff partielle Ordnung, da Induktionsordnungen keine partielle Ordnungen sein können (Terminierung schließt Reflexivität aus).

Wir demonstrieren die Verwendung von wohlfundierte Induktion mit einem Beweis der folgenden Behauptung:

Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ 0 + \cdots + n = \dfrac{n}{2}(n+1)$

Beweis Sei $P = \{\, n \in \mathbb{N} \mid 0+\cdots+n = \frac{n}{2}(n+1) \,\}$. Die Behauptung gilt genau dann, wenn $P = \mathbb{N}$. Also genügt es wegen Proposition 1.8.2, die Gültigkeit der folgenden Aussage zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \{\, m \in \mathbb{N} \mid n > m \,\} \subseteq P \ \Rightarrow\ n \in P$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte

$$(*) \quad \{\, m \in \mathbb{N} \mid n > m \,\} \subseteq P$$

Wir müssen $n \in P$ zeigen. Nach Definition von P gilt $n \in P$ genau dann, wenn

$$0 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n = 0$. Dann $0 + \cdots + n = 0 = \frac{n}{2}(n+1)$.

Sei $n > 0$. Dann $0+\cdots+n = 0+\cdots+(n-1)+n$. Da $n > n-1$, folgt $n-1 \in P$ mit $(*)$. Also $0 + \cdots + (n-1) = \frac{n-1}{2}(n-1+1)$ nach Definition von P. Also $0+\cdots+n = \frac{n-1}{2}(n-1+1) + n = \frac{n}{2}(n+1)$. □

Der gerade gezeigte Beweis entspricht offensichtlich gerade einem Beweis der Behauptung durch natürliche Induktion. Das ist kein Zufall, da natürliche Induktion ein Spezialfall von wohlfundierter Induktion ist ($X = \mathbb{N}$ und $\succ \;=\; >$).

Induktionsbeweise schreibt man nach einem ausgeklügelten Schema auf, das unnötige Details eliminiert. Insbesondere verzichtet man auf die Definition der Menge P. Ein schematischer Beweis lässt sich bei Bedarf mechanisch in den vollen Beweis übersetzen. Wir geben jetzt den schematischen Beweis für die gerade bewiesene Behauptung an. Wenn Sie den schematischen Beweis sorgfältig mit dem vollständigen Beweis vergleichen, werden Sie das Schema für Induktionsbeweise verstehen.

Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ 0 + \cdots + n = \dfrac{n}{2}(n+1)$

Beweis Durch Induktion über n.

Sei $n = 0$. Dann $0 + \cdots + n = 0 = \frac{n}{2}(n+1)$.

Sei $n > 0$. Dann

$$\begin{aligned} 0 + \cdots + n &= 0 + \cdots + (n-1) + n \\ &= \frac{n-1}{2}(n-1+1) + n && \text{Induktionsannahme} \\ &= \frac{n}{2}(n+1) \end{aligned}$$

□

1.9 Familiennotation

Abschließend führen wir noch eine gebräuchliche Notation für Mengen ein, die die Notation für Schnitte und Vereinigungen von Mengen von zwei auf beliebig viele Argumente verallgemeinert. Leider ist diese sogenannte Familiennotation nicht einfach zu verstehen. Wir werden sie erstmals im Kapitel über Aussagenlogik benutzen.

Sei $f \in I \to \mathcal{P}(X)$. Wir definieren die folgenden Notationen:

$$\begin{aligned} \bigcup f &\overset{\text{def}}{=} \{\, x \in X \mid \exists i \in I\colon\ x \in f(i) \,\} \\ \bigcap f &\overset{\text{def}}{=} \{\, x \in X \mid \forall i \in I\colon\ x \in f(i) \,\} \end{aligned}$$

Für $I = \emptyset$ gilt $\bigcup f = \emptyset$ und $\bigcap f = X$. Bis hierhin ist alles einfach. Die eigentliche Familiennotation sieht jedoch wie folgt aus (a ist ein Ausdruck):

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} a &\overset{\text{def}}{=} \bigcup(\lambda\, i \in I \,.\, a) \\ \bigcap_{i \in I} a &\overset{\text{def}}{=} \bigcap(\lambda\, i \in I \,.\, a) \end{aligned}$$

Das folgende Beispiel sollen Ihnen beim Verständnis der Familennotation helfen:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\, n^i \mid n \in \mathbb{N} \,\} &= \bigcup(\lambda\, i \in \mathbb{N} \,.\, \{\, n^i \mid n \in \mathbb{N} \,\}) \\ &= \{\, x \in \mathbb{N} \mid \exists i \in \mathbb{N}\colon\ x \in \{\, n^i \mid n \in \mathbb{N} \,\} \,\} \\ &= \{\, n^i \mid n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N} \,\} \end{aligned}$$

1.10 Bemerkungen

Mathematische Objekte haben eine einfache Struktur, da es nur drei mögliche Grundformen gibt: Zahlen, Tupel und Mengen. Alle benötigten mathematischen

Objekte können mithilfe dieser Grundformen dargestellt werden. Zudem stellt sich heraus, dass Zahlen und Tupel auf reine Mengen zurückgeführt werden können. Man kann also mit Mengen als einziger Grundform auskommen.[4]

Mengen sind die universelle Datenstruktur der Mathematik. Die damit verbundene Sichtweise von Mathematik bezeichnet man als *Mengenlehre*. Mengenlehre ist eine neuere Entwicklung. Als Begründer gilt Georg Cantor (1845-1918). Die Ideen der Mengelehre waren zunächst äußerst umstritten. Insbesondere gab es hitzige Debatten über die Existenz beziehungsweise Nichtexistenz von unendlichen Mengen. Um 1900 war immer noch unklar, ob es Mengen gibt, die sich selbst als Element enthalten. Erst ab 1950 wurde Mengenlehre zu der vorherrschenden mathematische Sichtweise als die wir sie heute kennen.

Es dauert auch in der Mathematik geraume Zeit, bis sich neue Sichtweisen durchsetzen. Ein Beispiel ist die Modellierung von Funktionen als Mengen (eine Errungenschaft der Mengenlehre) und die darauf abgestimmte Lambdanotation. Die sich daraus ergebende kaskadierte Darstellung von mehrstelligen Funktionen ist immer noch fast unbekannt, obwohl sie bereits um 1930 entdeckt wurde (Schönfinkel). Selbst die oft sehr hilfreiche Lambdanotation, die ebenfalls um 1930 entdeckt wurde (Alonzo Church), findet sich bis heute kaum in Mathematikbüchern.

[4] Siehe zum Beispiel Paul R. Halmos, Naive Set Theory, Springer-Verlag, 1974.