5. Übungsblatt zu Logik, Semantik und Verifikation SS 2002

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv02/

Abgabe: 13. Mai in der Vorlesungspause

Aufgabe 5.1: (8) Beweisen Sie, dass die folgenden Gleichungen in jeder Booleschen Algebra gelten:

(a) $x + y = \overline{x}y + x$.

(b) $(x, y, z) - (x, u, v) = (x, y - u, z - v)$.

(c) $(x, y, z) - u = (x, y - u, z - u)$.

(d) $((x, y, z), u, v) = (x, (y, u, v), (z, u, v))$.

Aufgabe 5.2: (4) Wir definieren die Formelmenge $For_1 \subseteq For$ wie folgt:

(a) Wenn X eine Variable ist, dann sind die Formeln X und $\neg X$ in For_1.

(b) Wenn A und B in For_1 sind, dann sind die Formeln $A \wedge B$ und $A \vee B$ in For_1.

Geben Sie Vereinfachungsregeln an, mit denen jede Formel nach For_1 übersetzt werden kaan.

Aufgabe 5.3: (4) Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung für die größte Formelmenge M an, die sich nach $\{0, 1\}$ übersetzen lässt. Geben Sie zudem eine möglichst kleine Menge V von Variablen an, sodass V jede signifikante Variable jeder Formel in M enthält.

Aufgabe 5.4: (4) Bestimmen Sie (von Hand) zwei äquivalente Primbäume zu der Formel $(X, Y \cdot U, Z \cdot V)$. Verwenden Sie die folgenden Variablenordnungen:

(a) $X < Y < U < V < Z$.

(b) $U < V < X < Y < Z$.

Aufgabe 5.5: (8) Stellen Sie alle 16 Funktionen $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ mit Primbäumen dar. Die Primbaumdarstellungen für Konjunktion und Disjunktion sind:

$$x \wedge y = (x, 0, y)$$
$$x \vee y = (x, y, 1)$$

Aufgabe 5.6: (2+4+4) Wir stellen Entscheidungsbäume wie folgt dar:

```
type var = int
datatatype dt = F | T | D of var * dt * dt
```

(a) Schreiben Sie eine Prozedur

```
neg: dt -> dt
```

die zu einem Primbaum A den zu $\neg A$ äquivalenten Primbaum liefert.

(b) Schreiben Sie eine Prozedur

```
apply: (dt -> dt -> dt) -> dt -> dt -> dt
```

sodass

```
fun And F a = F
  | And T a = a
  | And a F = F
  | And a T = a
  | And a b = if a=b then a else apply And a b
```

zu zwei Primbäumen A, B den zu $A \wedge B$ äquivalenten Primbaum liefert.

(c) Schreiben Sie eine Prozedur

```
or: dt -> dt -> dt
```

die zu zwei Primbäumen A, B den zu $A \vee B$ äquivalenten Primbaum liefert. Machen Sie dabei nur von den Prozedur `apply` Gebrauch.

Aufgabe 5.7: (8) Schreiben Sie eine Prozedur

```
substb: dt -> var -> bool -> dt
```

die zu einem Primbaum A, einer Variablen X und einem $b \in \mathbb{B}$ in linearer Zeit den zu $A[b/X]$ äquivalenten Primbaum berechnet.

Aufgabe 5.8: (4) Schreiben Sie eine Prozedur

```
subst: dt -> dt -> var -> dt
```

die zu zwei Primbäumen A, B und einer Variablen X den zu $A[B/X]$ äquivalenten Primbaum berechnet. Machen Sie dabei von der Gleichung

$$A[B/X] \models\mid (\neg B \wedge A[0/X]) \vee (B \wedge A[1/X])$$

und den Prozeduren `neg`, `And`, `or` und `substb` Gebrauch.