



6. Übungsblatt zu Logik, Semantik und Verifikation SS 2002

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv02/

Abgabe: Mittwoch, den 22. Mai in der Vorlesungspause

Aufgabe 6.1: Hintikka-Mengen (10) Sei $M \subseteq \text{For}$ eine Formelmenge mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Alle Formeln in M sind nur mit Variablen, \neg und \wedge gebildet.
- (b) Wenn $\neg A \in M$, dann $A \notin M$.
- (c) Wenn $\neg\neg A \in M$, dann $A \in M$.
- (d) Wenn $A_1 \wedge A_2 \in M$, dann $A_1 \in M$ und $A_2 \in M$.
- (e) Wenn $\neg(A_1 \wedge A_2) \in M$, dann $\neg A_1 \in M$ oder $\neg A_2 \in M$.

Zeigen Sie, dass es eine Belegung σ gibt mit

$$\forall A \in M: \mathcal{T}(A)\sigma = 1$$

Aufgabe 6.2: (8) Sei $X < Y$ und sei A die Formel $X \Leftrightarrow Y$.

- (a) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.
- (b) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.
- (c) Geben Sie den Primbaum für A an.
- (d) Geben Sie den Primbaum für \widehat{A} an.
- (e) Geben Sie die disjunktive Primform für \widehat{A} an.

Aufgabe 6.3: (8) Sei $X < Y < Z$ und sei A eine Formel mit

$$\forall \sigma \in \text{Var} \rightarrow \mathbb{B}: \mathcal{T}(A)\sigma = 1 \iff \sigma X + \sigma Y + \sigma Z \geq 1$$

- (a) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.
- (b) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.
- (c) Geben Sie den Primbaum für A an.
- (d) Geben Sie den Primbaum für \widehat{A} an.
- (e) Geben Sie die konjunktive Primform für \widehat{A} an.

Aufgabe 6.4: (8) Sei $X < Y < Z$ und sei A die Formel

$$(Z \Rightarrow (X \vee Y)) \wedge (X \vee Y \vee Z) \wedge (Y \Rightarrow X) \wedge (X \Rightarrow 0)$$

- (a) Geben Sie die Formel \widehat{A} an.
- (b) Geben Sie eine konjunktive Normalform für A an.
- (c) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.
- (d) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.
- (e) Geben Sie den Primbaum für A an.
- (f) Geben Sie den Primbaum für \widehat{A} an.

Aufgabe 6.5: (8) Sei PT die Menge aller Primbäume und PF die Menge aller Primformen.

- (a) Wieviele Funktionen $f \in PT \rightarrow PF$ mit $\forall A \in PT: A \models \mathbf{K}(f(A))$ gibt es?
- (b) Ist jede dieser Funktionen injektiv?
- (c) Ist jede dieser Funktionen surjektiv?
- (d) Wieviele Funktionen $f \in PF \rightarrow PT$ mit $\forall S \in PF: \widehat{f(S)} \models \mathbf{DS}$ gibt es?

Aufgabe 6.6: (8) Vier Freunde vereinbaren Regeln für eine Party:

- (a) Wer mit Rita tanzt, muss auch mit Karen und Maria tanzen.
- (b) Wer nicht mit Rita tanzt, darf nicht mit Karen tanzen, muss aber mit Clara tanzen.
- (c) Wer nicht mit Karen tanzt, darf nicht mit Clara tanzen.

Sie sollen diese Regeln in möglichst einfacher Form darstellen.

- (a) Beschreiben Sie jede der drei Regeln mit einer Booleschen Formel. Verwenden Sie dabei nur die Variablen C (Clara), K (Karen), M (Maria) und R (Rita).
- (b) Geben Sie die konjunktive Primform für die Konjunktion der Regeln an.
- (c) Geben Sie die disjunktive Primform für die Konjunktion der Regeln an.
- (d) Geben Sie den Primbaum für die Konjunktion der Regeln an.