Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz

`www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv02/`

Abgabe: Mittwoch, den 22. Mai in der Vorlesungspause

Aufgabe 6.1: Hintikka-Mengen (10) Sei $M \subseteq \mathit{For}$ eine Formelmenge mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Alle Formeln in M sind nur mit Variablen, $\neg$ und $\wedge$ gebildet.

(b) Wenn $\neg A \in M$, dann $A \notin M$.

(c) Wenn $\neg\neg A \in M$, dann $A \in M$.

(d) Wenn $A_1 \wedge A_2 \in M$, dann $A_1 \in M$ und $A_2 \in M$.

(e) Wenn $\neg(A_1 \wedge A_2) \in M$, dann $\neg A_1 \in M$ oder $\neg A_2 \in M$.

Zeigen Sie, dass es eine Belegung σ gibt mit

$$\forall A \in M\colon\ \mathcal{T}(A)\sigma = 1$$

Aufgabe 6.2: (8) Sei $X < Y$ und sei A die Formel $X \Leftrightarrow Y$.

(a) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.

(b) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.

(c) Geben Sie den Primbaum für A an.

(d) Geben Sie den Primbaum für $\widehat{A}$ an.

(e) Geben Sie die disjunktive Primform für $\widehat{A}$ an.

Aufgabe 6.3: (8) Sei $X < Y < Z$ und sei A eine Formel mit

$$\forall \sigma \in \mathit{Var} \to \mathbb{B}\colon\ \mathcal{T}(A)\sigma = 1 \iff \sigma X + \sigma Y + \sigma Z \geq 1$$

(a) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.

(b) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.

(c) Geben Sie den Primbaum für A an.

(d) Geben Sie den Primbaum für $\widehat{A}$ an.

(e) Geben Sie die konjunktive Primform für $\widehat{A}$ an.

Aufgabe 6.4: (8) Sei $X < Y < Z$ und sei A die Formel

$$(Z \Rightarrow (X \vee Y)) \wedge (X \vee Y \vee Z) \wedge (Y \Rightarrow X) \wedge (X \Rightarrow 0)$$

(a) Geben Sie die Formel $\widehat{A}$ an.

(b) Geben Sie eine konjunktive Normalform für A an.

(c) Geben Sie die konjunktive Primform für A an.

(d) Geben Sie die disjunktive Primform für A an.

(e) Geben Sie den Primbaum für A an.

(f) Geben Sie den Primbaum für $\widehat{A}$ an.

Aufgabe 6.5: (8) Sei PT die Menge aller Primbäume und PF die Menge aller Primformen.

(a) Wieviele Funktionen $f \in PT \to PF$ mit $\forall A \in PT\colon\ A \models\!\!\!\!\!\!= \mathbf{K}(f(A))$ gibt es?

(b) Ist jede dieser Funktionen injektiv?

(c) Ist jede dieser Funktionen surjektiv?

(d) Wieviele Funktionen $f \in PF \to PT$ mit $\forall S \in PF\colon\ \widehat{f(S)} \models\!\!\!\!\!\!= \mathbf{D}S$ gibt es?

Aufgabe 6.6: (8) Vier Freunde vereinbaren Regeln für eine Party:

(a) Wer mit Rita tanzt, muss auch mit Karen und Maria tanzen.

(b) Wer nicht mit Rita tanzt, darf nicht mit Karen tanzen, muss aber mit Clara tanzen.

(c) Wer nicht mit Karen tanzt, darf nicht mit Clara tanzen.

Sie sollen diese Regeln in möglichst einfacher Form darstellen.

(a) Beschreiben Sie jede der drei Regeln mit einer Booleschen Formel. Verwenden Sie dabei nur die Variablen C (Clara), K (Karen), M (Maria) und R (Rita).

(b) Geben Sie die konjunktive Primform für die Konjunktion der Regeln an.

(c) Geben Sie die disjunktive Primform für die Konjunktion der Regeln an.

(d) Geben Sie den Primbaum für die Konjunktion der Regeln an.