7. Übungsblatt zu Logik, Semantik und Verifikation SS 2002

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv02/

Abgabe: 27. Mai in der Vorlesungspause

Aufgabe 7.1: Funktionen und Fixpunkte (5) Gegeben sei eine endliche Menge M mit m Elementen. Wieviele Funktionen $f \in M \to M$ gibt es, die genau m Fixpunkte haben? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7.2: Punktweise Ordnungen für Funktionen (5) Sei X eine Menge und $\langle Y, \leq \rangle$ eine VPO mit einem kleinsten Element $\perp$. Wir definieren auf $X \to Y$ eine partielle Ordnung:

$$f \leq f' \iff \forall x \in X : f(x) \leq f'(x)$$

(a) Sei $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ $(\forall i \in \mathbb{N} : f_i \in X \to Y)$ eine Kette. Geben Sie die kleinste obere Schranke $f \in X \to Y$ dieser Kette an.

(b) Geben Sie das kleinste Element der VPO $\langle X \to Y, \leq \rangle$ an.

Aufgabe 7.3: Triviale Ordnung mit $\perp$ (5) Sei X eine Menge, $\perp \notin X$ und $X_\perp = X \cup \{\perp\}$. Wir definieren auf $X_\perp$ eine partielle Ordnung

$$x \leq x' \iff x = \perp \text{ oder } x = x'$$

Zeigen Sie, dass $\langle X_\perp, \leq \rangle$ eine VPO mit einem kleinsten Element ist.

Aufgabe 7.4: Stationäre VPOs (5) Sei $\langle X, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, so dass für jede aufsteigende Kette $x_0 \leq x_1 \leq \cdots$ ein n existiert, so dass $\forall i \geq n : x_i = x_n$. Zeigen Sie:

(a) $\langle X, \leq \rangle$ ist eine VPO.

(b) Jede monotone Funktion $X \to X$ ist stetig.

Aufgabe 7.5: VPOs ohne kleinste Elemente (5) Geben Sie eine vollständige partielle Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}$ an, so dass die VPO $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ kein kleinstes Element hat. Geben Sie eine bezüglich dieser VPO $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ stetige Funktion $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die keinen kleinsten Fixpunkt hat.

Aufgabe 7.6: Unstetige Funktionen (5) Gegeben sei die VPO $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$. Geben Sie eine Funktion $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ an, die bezüglich $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ monoton, aber nicht stetig ist.