12. Übungsblatt zu Logik, Semantik und Verifikation SS 2002

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv02/

Abgabe: Montag, 1. Juli in der Vorlesungspause

Aufgabe 12.1: Prüfbarkeit (4) Ist die Menge

$$M = \{\#c \mid c \in Com \wedge \forall x \in \mathbb{Z}\colon \mathcal{F}(c)x = \bot\}$$

prüfbar? Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort.

Aufgabe 12.2: Prüfbarkeit (4) Ist die Menge

$$M = \{\#c \mid c \in Com \wedge \exists x \in \mathbb{Z}\colon \mathcal{F}(c)x = \bot\}$$

prüfbar? Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort.

Aufgabe 12.3: Minimum (4) Geben Sie ein Prädikat $min \in (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ an, sodass $min\ f\ x$ genau dann gilt, wenn x das minimale Element der durch f dargestellten Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 12.4: Beschreibung einer Aussage (1+1+3+3+1) Betrachten Sie die folgende abkürzende Beschreibung einer mathematische Aussage:

$$\forall X\ \exists m\ (X\ m \wedge \forall x\ (X\ x \Rightarrow m \leq x))$$

Dabei haben die Konstanten $\wedge$ und $\Rightarrow$ ihre übliche Bedeutung. Bei $\leq$ handelt es sich um den kleiner-gleich-Test $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ für natürliche Zahlen.

(a) Welche Typen haben die quantifizierten Variablen?

(b) Welche Typen haben die verwendeten Quantorkonstanten $\forall_1$, $\exists$, $\forall_2$ (in der Reihenfolge ihres Auftretens)?

(c) Stellen Sie die Aussage durch einen Standard ML Ausdruck dar. Verwenden Sie dabei die Bezeichner `all1`, `some`, `and`, `all2`, `impl`, `le` für die Konstanten $\forall_1$, $\exists$, $\wedge$, $\forall_2$, $\Rightarrow$, $\leq$.

(d) Geben Sie die Baumdarstellung der Aussagen an. Stellen Sie dabei gebundene Variablen mit de Bruijn-Indizes dar.

(e) Geben Sie den Wert der Aussage an. Nehmen Sie dabei an, dass alle Konstanten wie üblich interpretiert werden.

Aufgabe 12.5: Englisch nach ETT (3) Stellen Sie die folgenden Aussagen als mathematische Aussagen dar:

(a) Everybody loves somebody.

(b) Somebody loves somebody.

(c) Everybody loves everybody.

(d) Nobody loves everybody.

(e) Somebody loves nobody.

Verwenden Sie dabei die Typkonstante *person* und die Termkonstante $\mathit{loves}\colon \mathit{person} \to \mathit{person} \to \mathbb{B}$. Außerdem können Sie die üblichen logischen Konstanten verwenden.

Aufgabe 12.6: Englisch nach ETT (2) Stellen Sie die folgenden Aussagen als mathematische Aussagen dar:

(a) You can fool some of the people some of the time.

(b) You can fool all the people some of the time.

(c) You can't fool all the people all the time.

(d) You can't fool a person all the time.

Verwenden Sie dabei die Typkonstanten *person* und *time* und die Termkonstante $\mathit{fool}\colon \mathit{person} \to \mathit{time} \to \mathbb{B}$. Außerdem können Sie die üblichen logischen Konstanten verwenden.

Aufgabe 12.7: Primzahlen (2+2+4+2) Sie sollen die Aussage „Es gibt unendlich viele Primzahlen" mit ETT beschreiben und dabei nur Variablen des Typs $\mathbb{N}$ quantifizieren. Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben.

(a) Geben Sie ein Prädikat $\mathit{teilt} \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein erstes Argument ein Teiler seines zweiten Arguments ist.

(b) Geben Sie ein Prädikat $\mathit{prim} \in \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein Argument eine Primzahl ist.

(c) Geben Sie ein Prädikat $\mathit{unendlich} \in (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein Argument eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ darstellt.

(d) Stellen Sie die Aussage „Es gibt unendlich viele Primzahlen" mit den obigen Prädikaten dar.

Aufgabe 12.8: Unendliche Teilmengen (2+3) Sie sollen das Prädikat „X ist eine unendliche Teilmenge von M" mit ETT beschreiben.

(a) Geben Sie ein Prädikat $\mathit{injektiv} \in (\mathbb{N} \to M) \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein Argument eine injektive Funktion ist.

(b) Geben Sie ein Prädikat $\mathit{unendlich} \in (M \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein Argument eine unendliche Teilmenge von M darstellt.

Aufgabe 12.9: Wohlfundierte Induktion (5+5) Propostion 1.8.2 formuliert eine Aussage, die die Korrektheit der Beweistechnik „wohlfundierte Induktion" feststellt. Sie sollen diese Aussage in ETT formulieren.

(a) Geben Sie ein Prädikat *terminiert* $\in (X \to X \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ an, das genau dann gilt, wenn sein Argument eine terminierende Relation auf X darstellt. Hinweis: Eine unendliche Folge von Elementen von X lässt sich durch eine Funktion $\mathbb{N} \to X$ darstellen.

(b) Propostion 1.8.2 stellt für jede Menge X die Gültigkeit einer Aussage der Form

$$\forall P \in X \to \mathbb{B} : \ \mathit{bedingung}\ P \Rightarrow \forall x \in X : \ P\,x$$

fest. Geben Sie das Prädikat *bedingung* an.