13. Übungsblatt zu Logik, Semantik und Verifikation SS 2002

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-lsv02/

Abgabe: Montag, 8. Juli in der Vorlesungspause

Aufgabe 13.1: Äquivalenz (4) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{A}$ an, die die Termkonstante $+ \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so interpretiert, dass die Terme $x + y$ und $y + x$ nicht $\mathcal{A}$-äquivalent sind.

Aufgabe 13.2: Stufe von Typen und Termen (2+2)

(a) Geben Sie einen möglichst einfachen Typ der Stufe 4 an. Verwenden Sie dabei nur die Typkonstante $\mathbb{N}$.

(b) Geben Sie einen möglichst einfachen geschlossenen Term der Stufe 2 an, der ohne Termkonstanten gebildet ist.

Aufgabe 13.3: Eigenschaften von Termen (1+1+1+1) Sei $\lambda fgx.\, fx(gx)$ ein α-normaler Term mit $\tau f = \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie die Variablen f, g, x als Paare (n, t) an.

(b) Geben Sie die de Bruijnsche Darstellung des Terms an.

(c) Geben Sie den Typ und die Stufe des Terms an.

(d) Ist der Term offen? β-normal? η-normal?

Aufgabe 13.4: Normalformen (2+2+2) Seien die Variablen $x = (2, \mathbb{N})$, $y = (0, \mathbb{N})$, $z = (1, \mathbb{N})$ und der Term $\lambda xy.u(\lambda z.vxz)(\lambda z.wxy((\lambda z.z)z))$ gegeben.

(a) Geben Sie die de Bruijnsche Darstellung des Terms an.

(b) Geben Sie die α-Normalform des Terms an.

(c) Geben Sie die λ-Normalform des Terms an.

Aufgabe 13.5: Substitution und Normalformen (2+2+2) Bestimmen Sie $\beta\eta$-Normalformen der folgenden Terme:

(a) $(\lambda xy.z(ux)(uy))[z := vxy]$.

(b) $(\lambda xy.z((\lambda x.ux)x)(uy))[z := vxy]$.

(c) $(\lambda xy.z((\lambda x.ux)x)(uy))[z := (\lambda xy.vxy)xy]$.

Aufgabe 13.6: Äquivalenz (2+2+2) Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die die Konstanten

$$>\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}, \quad \leq\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}, \quad \wedge\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}, \quad \exists\colon (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$$

wie üblich interpretiert.

(a) Geben Sie zu $\exists(\lambda x.y > x)$ einen λ-äquivalenten η-normalen Term an. Hinweis: $y > x$ beschreibt denselben Term wie $(>)yx$.

(b) Geben Sie zu $(\lambda g.\ gxy \wedge gyz)\ (\lambda xy.\ x \leq y \wedge y \leq x)$ einen λ-äquivalenten kombinatorischen Term an.

(c) Sei M der Term aus (b). Geben Sie zu $\exists(\lambda y.\exists(\lambda z.M))$ einen möglichst einfachen $\mathcal{A}$-äquivalenten Term an.

Aufgabe 13.7: Definition logischer Konstanten (1+1+1+1+1+3) Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die die Konstanten

$$\mathtt{ff}\colon \mathbb{B}, \quad \Rightarrow\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}, \quad \exists\colon (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}, \quad =\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$$

wie üblich interpretiert. Geben Sie einen geschlossenen Term des Typs

(a) $\mathbb{B} \to \mathbb{B}$ an, der in $\mathcal{A}$ Negation beschreibt.

(b) $\mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ an, der in $\mathcal{A}$ Disjunktion beschreibt.

(c) $\mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ an, der in $\mathcal{A}$ Konjunktion beschreibt.

(d) $(\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ an, der in $\mathcal{A}$ Allquantifizierung beschreibt.

(e) $(\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ an, der in $\mathcal{A}$ den Quantor „es existiert genau ein $x \in \mathbb{N}$ mit $fx = 1$“ beschreibt.

(f) $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ an, der in $\mathcal{A}$ Gleichheit für $\mathbb{N}$ beschreibt (d. h. $\mathcal{A}(=)$), aber die Termkonstante „=“ nicht enthält. Verwenden Sie dabei die Termkonstante $\forall'\colon ((\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$, die $\mathcal{A}$ als Allquantifizierung für Prädikate des Typs $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ interpretiert.

Aufgabe 13.8: Selektionsoperator (4+4+4) Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die die Konstanten

$$+\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \cdot\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad =\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B},$$
$$<\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{B}, \quad \wedge\colon\ \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}, \quad \exists\colon\ (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$$

wie üblich interpretiert. Außerdem nehmen wir an, dass $\mathcal{A}$ die Termkonstante $!\colon (\mathbb{N} \to \mathbb{B}) \to \mathbb{N}$ so interpretiert, dass gilt:

$$\forall f \in \mathbb{N} \to \mathbb{B}\colon\ (\exists x \in \mathbb{N}\colon\ fx = 1) \ \Rightarrow\ f(\mathcal{A}(!)f)$$

Die Funktion $\mathcal{A}(!)$ wird als *Selektionsoperator für* $\mathbb{N}$ bezeichnet, da sie aus jeder nichtleeren Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Element auswählt. Geben Sie einen geschlossenen Term des Typs $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, der in $\mathcal{A}$

(a) Subtraktion beschreibt (d.h. eine Funktion, die $m - n$ liefert, wenn $m \geq n$).

(b) ganzzahlige Division beschreibt (d.h. div).

(c) Restbildung beschreibt (d.h. mod).