Logik, Semantik und Verifikation SS 2002:
Musterlösung zum 1. Übungsblatt

Prof. Dr. Gert Smolka, Tim Priesnitz

Aufgabe 1.1: Unter- und Teilobjekte (5)

(a) Ja.

(b) $1, \{2, 3, \langle 2, 3\rangle\}, \langle 2, \langle 3, 7\rangle\rangle$.

(c) $2, 3, 7, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 7\rangle$.

Aufgabe 1.2: Strukturelle Induktion für Listen (12)

(a) Durch Induktion über xs.

- Sei $xs = nil$. Dann $xs@nil = nil = xs$ mit der Definition von @.
- Sei $xs = x :: xr$. Dann

$$
\begin{aligned}
xs@nil &= (x :: xr)@nil \\
&= x :: (xr@nil) && \text{Definition von @} \\
&= x :: xr && \text{Induktionsannahme} \\
&= xs
\end{aligned}
$$

(b) Durch Induktion über xs.

- Sei $xs = nil$. Dann

$$
\begin{aligned}
|xs@ys| &= |nil@ys| \\
&= |ys| && \text{Definition von @} \\
&= 0 + |ys| \\
&= |nil| + |ys| && \text{Definition von } |\_| \\
&= |xs| + |ys|
\end{aligned}
$$

- Sei $xs = x :: xr$. Dann

$$
\begin{aligned}
|xs@ys| &= |(x :: xr)@ys| \\
&= |x :: (xr@ys)| && \text{Definition von @} \\
&= 1 + |xr@ys| && \text{Definition von } |\_| \\
&= 1 + |xr| + |ys| && \text{Induktionsannahme} \\
&= |x :: xr| + |ys| && \text{Definition von } |\_| \\
&= |xs| + |ys|
\end{aligned}
$$

(c) Durch Induktion über xs.

- Sei $xs = nil$. Dann $|rev(xs)| = |rev(nil)| = |nil| = |xs|$ mit der Definition von rev.
- Sei $xs = x{::}xr$. Dann

$$\begin{aligned}
|rev(xs)| &= |rev(x{::}xr)| && \\
&= |rev(xr)@[x]| && \text{Definition von } rev \\
&= |rev(xr)| + |[x]| && \text{Teilaufgabe (b)} \\
&= |xr| + |[x]| && \text{Induktionsannahme} \\
&= |xr| + 1 && \text{Definition von } |_| \\
&= |x{::}xr| && \text{Definition von } |_| \\
&= |xs| &&
\end{aligned}$$

(d) Durch Induktion über xs.

- Sei $xs = nil$. Dann

$$\begin{aligned}
rev(xs@ys) &= rev(nil@ys) && \\
&= rev(ys) && \text{Definition von } @ \\
&= rev(ys)@nil && \text{Teilaufgabe (b)} \\
&= rev(ys)@rev(nil) && \text{Definition von } rev \\
&= rev(ys)@rev(xs) &&
\end{aligned}$$

- Sei $xs = x{::}xr$. Dann

$$\begin{aligned}
rev(xs@ys) &= rev((x{::}xr)@ys) && \\
&= rev(x{::}(xr@ys)) && \text{Definition von } @ \\
&= rev(xr@ys)@[x] && \text{Definition von } rev \\
&= (rev(ys)@rev(xr))@[x] && \text{Induktionsannahme} \\
&= rev(ys)@(rev(xr)@[x]) && \text{Hinweis} \\
&= rev(ys)@rev(x{::}xr) && \text{Definition von } rev \\
&= rev(ys)@rev(xs) &&
\end{aligned}$$

(e) Durch Induktion über xs.

- Sei $xs = nil$. Dann folgt mit der Definition von rev: $rev(rev(xs)) = rev(rev(nil)) = rev(nil) = nil = xs$.

- Sei $xs = Mx :: xr$. Dann

$$\begin{aligned}
rev(rev(xs)) &= rev(rev(x :: xr)) \\
&= rev(rev(xr)@[x]) && \text{Definition von } rev \\
&= rev([x])@rev(rev(xr)) && \text{Teilaufgabe (d)} \\
&= rev([x])@xr && \text{Induktionsannahme} \\
&= [x]@xr && \text{Definition von } rev \\
&= x :: xr && \text{Definition von @} \\
&= xs
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.3: Strukturelle Induktion für N (18)

(a)

$$\frac{}{\emptyset \in N} \qquad \frac{x \in N}{\{x\} \in N}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\cdot &\in N \times N \to N \\
\emptyset \cdot y &= \emptyset \\
\{x\} \cdot y &= (x \cdot y) + y
\end{aligned}$$

(c) Durch Induktion über x.

- Sei $x = \emptyset$. Dann folgt mit der Definition von $+$: $x + (y + z) = \emptyset + (y + z) = y + z = (\emptyset + y) + z = (x + y) + z$.
- Sei $x = \{x'\}$. Dann

$$\begin{aligned}
x + (y + z) &= \{x'\} + (y + z) \\
&= \{x' + (y + z)\} && \text{Definition von } + \\
&= \{(x' + y) + z\} && \text{Induktionsannahme} \\
&= \{x' + y\} + z && \text{Definition von } + \\
&= (\{x'\} + y) + z && \text{Definition von } + \\
&= (x + y) + z
\end{aligned}$$

(d) Durch Induktion über x.

- Sei $x = \emptyset$. Dann folgt mit der Definition von $+$: $x + \emptyset = \emptyset + \emptyset = \emptyset = x$.
- Sei $x = \{x'\}$. Dann

$$\begin{aligned}
x + \emptyset &= \{x'\} + \emptyset \\
&= \{x' + \emptyset\} && \text{Definition von } + \\
&= \{x'\} && \text{Induktionsannahme} \\
&= x
\end{aligned}$$

(e) Durch Induktion über x.

- Sei $x = \emptyset$. Nach Definition von $+$ gilt $\{x\} = \{\emptyset\} = \emptyset + \{\emptyset\} = x + \{\emptyset\}$.
- Sei $x = \{x'\}$. Dann

$$
\begin{aligned}
\{x\} &= \{\{x'\}\} \\
&= \{x' + \{\emptyset\}\} && \text{Induktionsannahme} \\
&= \{x'\} + \{\emptyset\} && \text{Definition von } + \\
&= x + \{\emptyset\}
\end{aligned}
$$

(f) Durch Induktion über x.

- Sei $x = \emptyset$. Dann

$$
\begin{aligned}
x + y &= \emptyset + y \\
&= y && \text{Definition von } + \\
&= y + \emptyset && \text{Teilaufgabe (d)} \\
&= y + x
\end{aligned}
$$

- Sei $x = \{x'\}$. Dann

$$
\begin{aligned}
x + y &= \{x'\} + y \\
&= \{x' + y\} && \text{Definition von } + \\
&= \{y + x'\} && \text{Induktionsannahme} \\
&= \{y\} + x' && \text{Definition von } + \\
&= (y + \{\emptyset\}) + x' && \text{Teilaufgabe (e)} \\
&= y + (\{\emptyset\} + x') && \text{Teilaufgabe (c)} \\
&= y + (\{\emptyset + x'\}) && \text{Definition von } + \\
&= y + \{x'\} && \text{Definition von } + \\
&= y + x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.4: Arithmetische Ausdrücke (15)

```
fun show (Con c)      = "<1," ^ Int.toString c ^ ">"
  | show (Var y)      = "<2," ^ Int.toString y ^ ">"
  | show (Add(e1,e2)) = "<3,<" ^ show e1 ^ "," ^ show e2 ^ ">>"
  | show (Mul(e1,e2)) = "<4,<" ^ show e1 ^ "," ^ show e2 ^ ">>"

fun subst (Con c)      e x = Con c
  | subst (Var y)      e x = if y=x then e else Var y
  | subst (Add(e1,e2)) e x = Add(subst e1 e x, subst e2 e x)
  | subst (Mul(e1,e2)) e x = Mul(subst e1 e x, subst e2 e x)

type valuation = var -> exp

fun eval (Con c)     v = c
  | eval (Var x)     v = v x
  | eval (Add(e,e')) v = eval e v + eval e' v
  | eval (Mul(e,e')) v = eval e v + eval e' v
```