Logik, Semantik und Verifikation SS 2002: Musterlösung zum 2. Übungsblatt

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz

Aufgabe 2.1: Modellierung (10)

(a) 2^7.

(b) (a) $\neg Sa \Rightarrow Fr$

(b) $\neg Di \wedge Fr \Rightarrow Do$

(c) $(\neg Di \Rightarrow \neg Mo \wedge Do) \Rightarrow Sa$

(d) $Di \Rightarrow \neg Mi$

(e) $Mo \Rightarrow \neg Fr$

(f) $Sa \Rightarrow \neg Do \wedge Fr$

(c) $(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$

Aufgabe 2.2: Challenge (ohne Punkte)

(a) Wir geben nur eine Lösung an; im Laufe der Vorlesung werden Sie noch lernen, wie man möglichst einfache Formeln systematisch berechnen kann (eventuell kennen Sie auch schon das Verfahren von Quine-McClusky aus der Vorlesung Rechnerorganisation).

$$\neg Mo \wedge Di \wedge \neg Mi \wedge \neg Do \wedge Fr \wedge Sa$$

(b) Maria arbeitet immer am Dienstag, Freitag und Samstag (Erfolg hat anscheinend eine hohen Preis), nie jedoch am Montag, Mittwoch und Donnerstag. Sonntags macht sie was sie will.

(c) Genau zwei.

Aufgabe 2.3: Modellierung (8) Wir modellieren die Farben eines Knotens $v \in V \subseteq Var$ wie folgt: v ist rot, genau dann wenn v mit null belegt wird, sonst ist er blau.

Sei $v_1 \to v_2 \in E$ eine Kante. Die Knoten v_1 und v_2 müssen verschieden belegt werden werden: $\neg(v_1 \wedge v_2) \wedge \neg(\neg v_1 \wedge \neg v_2)$.

Wäre Implikation zugelassen, könnte man einfacher schreiben: $(v_1 \Rightarrow \neg v_2) \wedge (\neg v_1 \Rightarrow v_2)$.

Aufgabe 2.4: Substitutionslemma für AL (8)

- Sei $A = Y \in Var$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

– $X = Y$. Dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\![A[B/X]]\!]\sigma &= \mathcal{F}[\![Y[B/X]]\!]\sigma \\
&= \mathcal{F}[\![B]\!]\sigma && \text{Definition von Substitution} \\
&= \sigma[\mathcal{F}[\![B]\!]\sigma/X](X) && \text{Definition von Adjunktion} \\
&= \mathcal{F}[\![X]\!](\sigma[\mathcal{F}[\![B]\!]\sigma/X]) && \text{Definition von } \mathcal{F} \\
&= \mathcal{F}[\![Y]\!](\sigma[\mathcal{F}[\![B]\!]\sigma/X]) \\
&= \mathcal{F}[\![A]\!](\sigma[\mathcal{F}[\![B]\!]\sigma/X])
\end{aligned}$$

– $X \neq Y$. Dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\![A[B/X]]\!]\sigma &= \mathcal{F}[\![Y[B/X]]\!]\sigma \\
&= \mathcal{F}[\![Y]\!]\sigma && \text{Definition von Substitution} \\
&= \sigma(Y) && \text{Definition von } \mathcal{F} \\
&= \sigma[\mathcal{F}[\![B]\!]\sigma/X](Y) && \text{Definition von Adjunktion} \\
&= \mathcal{F}[\![Y]\!](\sigma[\mathcal{F}[\![B]\!]\sigma/X]) && \text{Definition von } \mathcal{F} \\
&= \mathcal{F}[\![A]\!](\sigma[\mathcal{F}[\![B]\!]\sigma/X])
\end{aligned}$$

- Sei $A = \neg A'$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\![A[B/X]]\!]\sigma &= \mathcal{F}[\![\neg A'[B/X]]\!]\sigma \\
&= 1 - \mathcal{F}[\![A'[B/X]]\!]\sigma && \text{Definition von } \mathcal{F} \\
&= 1 - \mathcal{F}[\![A']\!]\sigma[\mathcal{F}[\![B]\!]\sigma/X] && \text{Induktionsannahme} \\
&= \mathcal{F}[\![\neg A']\!]\sigma[\mathcal{F}[\![B]\!]\sigma/X] && \text{Definition von } \mathcal{F} \\
&= \mathcal{F}[\![A]\!]\sigma[\mathcal{F}[\![B]\!]\sigma/X]
\end{aligned}$$

- Sei $A = A_1 \wedge A_2$. Analog zur Negation.

Aufgabe 2.5: Erfüllbarkeit (4) $M = \{\neg a, a \vee b, a \vee \neg b\}$, denn:

(a) M enthält drei Formeln.

(b) Sei σ eine beliebige Belegung. Wir betrachten die beiden folgenden Fälle:

- $\sigma(a) = 0$. Dann ist $\mathcal{F}[\![\neg a]\!]\sigma = 1$, aber $\mathcal{F}[\![a \vee b]\!]\sigma = \mathcal{F}[\![b]\!]\sigma \neq \mathcal{F}[\![b]\!]\sigma = \mathcal{F}[\![a \vee \neg b]\!]\sigma$. Also kann nicht sowohl $\mathcal{F}[\![a \vee b]\!]\sigma = 1$ als auch $\mathcal{F}[\![a \vee \neg b]\!]\sigma = 1$ sein.
- $\sigma(a) = 1$. Dann ist $\mathcal{F}[\![\neg a]\!]\sigma = 0$.

(c)

Teilmenge	Erfüllende Belegung
$\{\neg a, a \vee b\}$	$\sigma(a) = 0 \quad \sigma(b) = 1$
$\{\neg a, a \vee \neg b\}$	$\sigma(a) = 0 \quad \sigma(b) = 0$
$\{a \vee b, a \vee \neg b\}$	$\sigma(a) = 1 \quad \sigma(b) = 0$

Aufgabe 2.6: Signifikante Variablen (10)

(a) Zunächst beobachten wir, dass gilt:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}(0) = & \mathcal{M}(X_0 \wedge \neg X_0) = \mathcal{M}(X_0) \cap -\mathcal{M}(X_0) & = \emptyset \\ \mathcal{M}(1) = & \ldots & = \Sigma \end{array}$$

Somit gilt:

$$\begin{array}{l} A \models\!\!\!\mid 0 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}(A) = \emptyset \\ A \models\!\!\!\mid 1 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}(A) = \Sigma \end{array}$$

Desweiteren folgt $SV(A) = SV(\mathcal{M}(A))$. Die Behauptung folgt jetzt sofort aus Proposition 4.6.9 im Skript.

(b) Wir geben zwei Beispiele an:

$X \wedge (Y \vee \neg Y)$
$X \wedge (X \vee Y)$ Absorption

In beiden Beispielen ist X signifikant und Y redundant.

(c) $M = \{\lambda X \in \mathit{Var}.0\} = \{(X, 0) \mid X \in \mathit{Var}\}$

Aufgabe 2.7: Expressivität (10)

(a)

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}[\![A_1 \vee A_2]\!]\sigma & = & \max\{\mathcal{F}[\![A_1]\!]\sigma, \mathcal{F}[\![A_2]\!]\sigma\} \\ \mathcal{F}[\![A_1 \Rightarrow A_2]\!]\sigma & = & \max\{1 - \mathcal{F}[\![A_1]\!]\sigma, \mathcal{F}[\![A_2]\!]\sigma\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}[\![A_1 \vee A_2]\!]\sigma & = & \mathcal{M}[\![A_1]\!] \cup \mathcal{M}[\![A_2]\!] \\ \mathcal{M}[\![A_1 \Rightarrow A_2]\!]\sigma & = & (\Sigma - \mathcal{M}[\![A_1]\!]) \cup \mathcal{M}[\![A_2]\!] \end{array}$$

(b) Wir zeigen, dass für die Belegung σ mit

$$\forall X \in \mathit{Var}:\; \sigma(X) \overset{\text{def}}{=} 1$$

gilt:

$$\forall A \in \mathit{KDI}:\; \mathcal{F}[\![A]\!]\sigma = 1$$

Den Beweis führen wir mit Induktion über A.

- Sei $A = X$. Nach Definition ist $\sigma(X) = 1$, also $\mathcal{F}[\![A]\!]\sigma = \mathcal{F}[\![X]\!]\sigma = \sigma(X) = 1$.
- Sei $A = A_1 \wedge A_2$. Nach Induktionsannahme gilt $\mathcal{F}[\![A_1]\!]\sigma = 1$ und $\mathcal{F}[\![A_2]\!]\sigma = 1$. Nach Definition von $\mathcal{F}$ gilt $\mathcal{F}[\![A]\!]\sigma = \mathcal{F}[\![A_1 \wedge A_2]\!]\sigma = \min\{\mathcal{F}[\![A_1]\!]\sigma, \mathcal{F}[\![A_2]\!]\sigma\} = \min\{1, 1\} = 1$.
- Sei $A = A_1 \vee A_2$. Analog zur Konjunktion.
- Sei $A = A_1 \Rightarrow A_2$. Analog zur Konjunktion.

(c) $X \wedge \neg X$. Diese Formel kann zu keiner Formel aus *KDI* logisch äquivalent sein, da sie unerfüllbar ist!