Logik, Semantik und Verifikation SS 2002: Musterlösung zum 4. Übungsblatt

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz

Aufgabe 4.2: Binäre Boolesche Funktionen (9)

(a)

```
fun to f = (f(false,false), f(false,true),
            f(true,false), f(true,true))

fun from t (false,false) = #1 (t : bool * bool * bool *bool)
  | from t (false,true)  = #2 t
  | from t (true,false)  = #3 t
  | from t (true,true)   = #4 t
```

(b)

$$|\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}| = |\mathbb{B}^4| = 2^4 = 16$$

(c)

$$0, 1, x, y, \neg x, \neg y$$
$$x \wedge y, \neg(x \wedge y), x \vee y, \neg(x \vee y)$$
$$x \Rightarrow y, \neg(x \Rightarrow y), y \Rightarrow x, \neg(y \Rightarrow x)$$
$$x \Leftrightarrow y, \neg(x \Leftrightarrow y)$$

Aufgabe 4.3: Boolesche Algebren (2) Wähle die Potenzmengenalgebra $\mathcal{P}_M$ wobei $M = \{a, b\}$. Nun gilt für $x = \{a\} \neq 0$ und $y = \{b\} \neq 0$:

$$x \wedge y = x \cap y = \emptyset = 0$$

Aufgabe 4.4: Endliche Kompaktheit (6) Sei M unendlich und erfüllbar. Da *Var* endlich, ist auch

$$D = \{\mathcal{M}(A) \mid A \in M\} \subseteq \mathcal{P}(Var \to \mathbb{B})$$

endlich. Also können wir eine endliche Teilmenge $N \subseteq M$ mit $D = \{\mathcal{M}(A) \mid A \in M\}$ wählen. Offensichtlich ist N unerfüllbar.

Aufgabe 4.5: Teilmengentest (3)

```
fun subset (t,t') = impl(t,t') = T
```

Aufgabe 4.6: Primbäume und Klauseln (18)

(a)

```
fun add x cs = map (fn xs => x::xs) cs

fun dnf T = [nil]
  | dnf F = nil
  | dnf (D(t,x,t')) = (add (~x) (dnf t)) @ (add x (dnf t'))
```

(b)

```
fun cnf T = nil
  | cnf F = [nil]
  | cnf (D(t,x,t')) = (add x (cnf t)) @ (add (~x) (cnf t'))
```

(c)

```
fun witness T = nil
  | witness F = raise Match
  | witness (D(t,x,F )) = ~x :: witness t
  | witness (D(_,x,t')) =  x :: witness t'
```

(d)

```
fun counterwitness T = raise Match
  | counterwitness F = nil
  | counterwitness (D(t,x,T )) = ~x :: counterwitness t
  | counterwitness (D(_,x,t')) =  x :: counterwitness t'
```