Logik, Semantik und Verifikation SS 2002:
Musterlösung zum 5. Übungsblatt

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz

Aufgabe 5.1: (8)

(a)

$$
\begin{array}{ll}
x+y & \\
= x+y*1 & \text{Identität} \\
= x+y*(x+\overline{x}) & \text{Komplement} \\
= x+yx+y\overline{x} & \text{Distributivität} \\
= x+xy+\overline{x}y & \text{2x Kommutativität} \\
= x+\overline{x}y & \text{Absorption} \\
= \overline{x}y+x & \text{Kommutativität}
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{ll}
(x,y,z)-(x,u,v) & \\
= (x,y,z)*\overline{(x,u,v)} & \text{Differenz} \\
= (x,y,z)*(x,\overline{u},\overline{v}) & \text{Proposition 4.1.5 (2)} \\
= (x,y\overline{u},z\overline{v}) & \text{Proposition 4.1.5 (4)} \\
= (x,y-u,z-v) & \text{2x Differenz}
\end{array}
$$

(c)

$$
\begin{array}{ll}
(x,y,z)-u & \\
= (x,y,z)*\overline{u} & \text{Differenz} \\
= (x,y*\overline{u},z*\overline{u}) & \text{Proposition 4.1.5 (3)} \\
= (x,y-u,z-u) & \text{2x Differenz}
\end{array}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
& ((x, y, z), u, v) && \\
&= \overline{(x, y, z)}u + (x, y, z)v && \text{Konditional} \\
&= (x, \overline{y}, \overline{z})u + (x, y, z)v && \text{Proposition 4.1.5 (2)} \\
&= (\overline{x}\overline{y} + x\overline{z})u + (\overline{x}y + xz)v && \text{2x Konditional} \\
&= \overline{x}\overline{y}u + x\overline{z}u + \overline{x}yv + xzv && \text{2x Distributivität} \\
&= \overline{x}(\overline{y}u + yv) + x(\overline{z}z + zv) && \text{2x Distributivität} \\
&= \overline{x}(\overline{y}u + yv) + x(\overline{z}z + zv) && \text{2x Distributivität} \\
&= (x, (y, u, v), (z, u, v)) && \text{3x Konditional}
\end{aligned}
$$

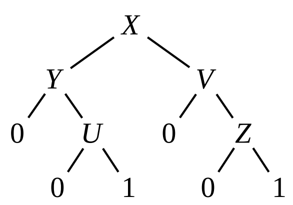
Aufgabe 5.2: (4) Wir definieren die folgende Übersetzungsfunktion $t : \mathit{For} \to \mathit{For}_1$:

$$
\begin{aligned}
t(0) &= X_0 \wedge \neg X_0 && \text{Konstante 0} \\
t(1) &= X_0 \vee \neg X_0 && \text{Konstante 1} \\
t(X) &= X && \text{Variable} \\
t(\neg X) &= \neg X && \text{negierte Variable} \\
t(\neg\neg A) &= t(A) && \text{Doppel-Negation} \\
t(A \wedge B) &= t(A) \wedge t(B) && \text{Konjunktion} \\
t(A \vee B) &= t(A) \vee t(B) && \text{Disjunktion} \\
t(A - B) &= t(A \wedge \neg B) && \text{Differenz} \\
t(A \Rightarrow B) &= t(\neg A \vee B) && \text{Implikation} \\
t(A \Leftrightarrow B) &= t(A \Leftarrow B) \wedge t(B \Leftarrow A) && \text{Äquivalenz} \\
t(\neg(A \vee B)) &= t(\neg A \wedge \neg B) && \text{de Morgan} \\
t(\neg(A \wedge B)) &= t(\neg A \vee \neg B) && \text{de Morgan} \\
t(\neg A) &= t(\neg t(A)) \text{ falls } A \notin \{A \vee B, A \wedge B\} && \text{Negation} \\
t((A, B, C)) &= t(\neg A \wedge B \vee A \wedge B) && \text{Konditional}
\end{aligned}
$$

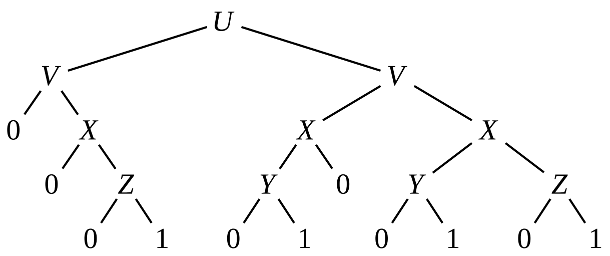
Aufgabe 5.3: (4) Die Menge M ist die Menge aller gültigen und unerfüllbaren Formeln. Die Menge V ist leer.

Aufgabe 5.4: (4)

(a)



(b)



Aufgabe 5.5: (8)

x	y	$x \circ y$
0	0	x_1
0	1	x_2
1	0	x_3
1	1	x_4

x_1	x_2	x_3	x_4	Name	Primbaum
0	0	0	0	Konstante 0	0
0	0	0	1	Konjunktion	$(x, 0, y)$
0	0	1	0	negierte Implikation	$(x, 0, (y, 1, 0))$
0	0	1	1	x	$(x, 0, 1)$
0	1	0	0	?	$(x, y, 0)$
0	1	0	1	y	$(y, 0, 1)$
0	1	1	0	exklusive Disjunktion	$(x, y, (y, 1, 0))$
0	1	1	1	Disjunktion	$(x, y, 1)$
1	0	0	0	negierte Disjunktion	$(x, (y, 1, 0), 0)$
1	0	0	1	Äquivalenz	$(x, (y, 1, 0), y)$
1	0	1	0	y negiert	$(y, 1, 0)$
1	0	1	1	?	$(x, (y, 1, 0), 1)$
1	1	0	0	x negiert	$(x, 1, 0)$
1	1	0	1	Implikation	$(x, 1, y)$
1	1	1	0	negierte Konjunktion	$(x, 1, (y, 1, 0))$
1	1	1	1	Konstante 1	1

Aufgabe 5.6: (2+4+4)

(a)

```
type     var = int
datatype dt  = F | T | D of var * dt * dt

fun var x = D(x,F,T)

fun neg F = T
  | neg T = F
  | neg (D(x,a,b)) = D(x,neg a,neg b)
```

(b)

```
fun red (t as (_,a,b)) = if a=b then a else D t

fun apply f (a as D(x,a0,a1)) (b as D(y,b0,b1)) =
    if x<y then red(x, apply f a0 b, apply f a1 b)
    else if x=y then red(x, apply f a0 b0, apply f a1 b1)
         else red(y, apply f a b0 ,apply f a b1)
  | apply f a b = f a b
```

(c)

```
fun or F a = a
  | or T a = T
  | or a F = a
  | or a T = T
  | or a b = if a=b then a else apply or a b
```

Aufgabe 5.7: (8)

```
fun substb F _ s = F
  | substb T _ s = T
  | substb (a as D(y,a0,a1)) x s =
    if x<y then a
    else if x=y then if s then a1 else a0
         else red (y, substb a0 x s, substb a1 x s)
```

Aufgabe 5.8: (4)

```
fun subst a b x = or (And (neg b) (substb a x false))
                     (And    b    (substb a x true ))
```