Logik, Semantik und Verifikation SS 2002: Musterlösung zum 6. Übungsblatt

Prof. Dr. Gert Smolka, Dipl.-Inform. Tim Priesnitz

Aufgabe 6.1: Hintikka-Mengen (10) Wir definieren eine Belegung wie folgt:

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \lambda X \in \mathit{Var}.\text{if } X \in M \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

Wir zeigen: $\forall A \in \mathit{For} : A \in M \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}(A)\sigma = 1$.

Aufgrund der Eigenschaft (d) können wir keinen Beweis mit struktureller Induktion über A führen: sowohl $\neg A_1$ als auch $\neg A_2$ sind keine Teilobjekte von $\neg(A_1 \wedge A_2)$. Deshalb führen wir den Beweis über die Größe $|A|$ einer Formel A, die wie folgt definiert ist:

$$|\_| \in \mathit{For} \to \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} |X| &= 1 \\ |\neg A| &= 1 + |A| \\ |A_1 \wedge A_2| &= 1 + |A_1| + |A_2| \end{aligned}$$

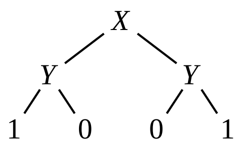
- Sei $|A| = 1$. Dann ist $A = X \in \mathit{Var}$. Die Behauptung folgt direkt aus der Definition von σ.
- Sei $|A| = n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann besagt die Induktionsvorraussetzung, dass für jede Formel A' mit $\left|A'\right| \leq n$ gilt: $A \in M \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}(A)\sigma = 1$. Wir machen eine Fallunterscheidung:
  - $A = \neg A'$. Sei $A' \in M$. Wir machen eine weitere Fallunterscheidung für A'.
    * $A' = X \in \mathit{Var}$. Dann gilt nach (a), dass $X \notin M$ und damit nach Definition von σ, dass $\sigma(X) = 0$. Also $1 = \mathcal{F}(\neg X)\sigma = \mathcal{F}(\neg A')\sigma = \mathcal{F}(A)\sigma$.
    * $A' = \neg A''$. Dann gilt nach (b), dass $A'' \in M$ und nach Induktionsvorraussetzung ist $\mathcal{F}(A'')\sigma = 1$. Damit gilt $1 = \mathcal{F}(A'')\sigma = \mathcal{F}(\neg\neg A'')\sigma = \mathcal{F}(A)\sigma$.
    * $A' = A_1 \wedge A_2$. Dann gilt nach (d), dass $\neg A_1 \in M$ oder $\neg A_2 \in M$. Nach Induktionsvoraussetzung (denn $|A_1| < n$ und $|A_2| < n$) gilt: $\mathcal{F}(\neg A_1)\sigma = 1$ oder $\mathcal{F}(\neg A_2)\sigma = 1$, also $\mathcal{F}(A_1)\sigma = 0$ oder $\mathcal{F}(A_2)\sigma = 0$. Damit ist $\mathcal{F}(A_1 \wedge A_2)\sigma = 0$, also $\mathcal{F}(A)\sigma = \mathcal{F}(\neg(A_1 \wedge A_2))\sigma = 1$.
  - $A = A_1 \wedge A_2$. Sei $A \in M$. Nach (c) gilt $A_1, A_2 \in M$, also nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{F}(A_1)\sigma = \mathcal{F}(A_2)\sigma = 1$ und damit auch $\mathcal{F}(A)\sigma = 1$.

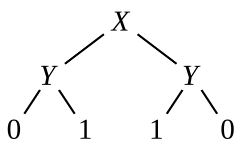
Aufgabe 6.2: (8)

(a) Es gilt $X \Leftrightarrow Y \models\!\!\!\!\!\mid XY + \overline{X}\,\overline{Y}$. Somit ist die disjunktive Primform $\{\{X, Y\}, \{\neg X, \neg Y\}\}$.

(b) Es gilt $X \Leftrightarrow Y \models\!\!\!\!\!\mid (X - Y)(Y - X)$. Somit ist die konjunktive Primform $\{\{X, \neg Y\}, \{Y, \neg X\}\}$.

(c)



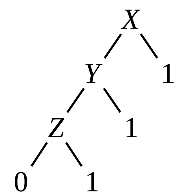
(d) 

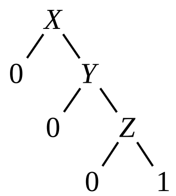
(e) Die disjunktive Primform für $\widehat{A}$ ist gleich der konjunktiven Primform für A, somit siehe Teilaufgabe (b).

Aufgabe 6.3: (8) Es gilt $A \models\!\!\!\!\!\;\dashv X + Y + Z$.

(a) Disjunktive Primform $\{\{X\}, \{Y\}, \{Z\}\}$.

(b) Konjunktive Primform $\{\{X, Y, Z\}\}$.

(c) 

(d) 

(e) Die konjunktive Primform für $\widehat{A}$ ist gleich der disjunktiven Primform für A, somit siehe Teilaufgabe (a).

Aufgabe 6.4: (8) Die Formel A ist unerfüllbar.

(a) $((X \wedge Y) - Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X - Y) \vee (1 - X)$

(b) $\mathrm{knf}(0) = \{\emptyset\}$

(c) $\{\emptyset\}$

(d) $\emptyset$

(e) 0

(f) 1

Aufgabe 6.5: (8)

(a) Aus der Eindeutigkeit beider Normalformen folgt auch die Ein-Eindeutigkeit von f. Somit ist f bijektiv

(b) ...und somit auch injektiv

(c) ...und surjektiv.

(d) Aus der Eindeutigkeit beider Normalformen und der Tatsache, dass der Dualisierungsoperator auf Primbäumen selbstinvertierend ist, folgt die Ein-Eindeutigkeit von f.

Aufgabe 6.6: (8)

(a)

$$\begin{aligned} R &\Rightarrow K \wedge M \\ \neg R &\Rightarrow \neg K \wedge C \\ \neg K &\Rightarrow \neg C \end{aligned}$$

(b) Disjunktive Primform $\{\{R, K, M\}\}$.

(c) Konjunktive Primform $\{\{R\}, \{K\}, \{M\}\}$.

(d) Sei $R < K < M < C$