2. Übungsblatt zu Programmierung

Prof. Gert Smolka, Thorsten Brunklaus
www.ps.uni-sb.de/courses/prog-ws00/

Abgabe: 10. November 2000 in der Vorlesungspause (auf Papier)

Allgemeine Hinweise: Die Übungsblätter sollen in Zweiergruppen bearbeitet werden. Jede Gruppe soll nur eine Lösung einreichen, versehen mit den Namen und den Matrikelnummern der Gruppenmitglieder.

Aufgabe 2.1: Auswertungsprotokolle (4+1+1) Gegeben sei die Prozedurdeklaration

```
fun f(n : int, a : int) = if n = 0 then a else f(n - 1, a * n)
```

(a) Geben Sie das Auswertungsprotokoll für den Ausdruck `f(3,1)` an. Halten Sie sich dabei genau an die angebene Beschreibung des Auswertungsprozesses. Sie bekommen dann 18 Auswertungsschritte.

(b) Für welche Argumente divergiert die Prozedur `f`? Denken Sie daran, daß Auswertungsprotokolle mit beliebig großen Zahlen rechnen können.

(c) Berechnen die Prozeduren

```
fun g(n : int) = f(n, 1)

fun h(n : int) = if n < 2 then 1 else n * h(n - 1)
```

für Argumente $n \geq 0$ dieselbe Funktion?

Aufgabe 2.2: Produkte und Summen (1+1+1+1) Geben Sie alle Elemente der folgenden Mengen an:

(a) $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$

(b) $\mathbb{B} \uplus \mathbb{B}$

(c) $\mathbb{B} \uplus \mathbb{B} \uplus \mathbb{B}$

(d) $\mathbb{B} \uplus (\mathbb{B} \times \mathbb{B})$

Aufgabe 2.3: Endliche Funktionen (1+1+1+4+1+1+1+1+1+1) Die Funktionen $f, g \in \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ sind wie folgt gegeben:

(x, y)	$f(x, y)$	$g(x, y)$
$(0, 0)$	0	0
$(0, 1)$	0	1
$(1, 0)$	0	1
$(1, 1)$	1	1

(a) Beschreiben Sie f und g mit Lamda-Notation:

$$f = \lambda\,(x, y) \in \mathbb{B}^2 \,\textbf{.}\; \ldots$$
$$g = \lambda\,(x, y) \in \mathbb{B}^2 \,\textbf{.}\; \ldots$$

(b) Beschreiben Sie f und g als Menge:

$$f = \{\ldots\}$$
$$g = \{\ldots\}$$

(c) Beschreiben Sie die Adjunktion $f + g$ mit Lambda-Notation und als Menge:

$f + g = \lambda\ \ldots$
$f + g = \{\ldots\}$

(d) Welche der folgenden Aussagen sind gültig:

(i) $f \in \mathbb{B}^2 \overset{fin}{\rightharpoonup} \mathbb{B}$
(ii) $f + g \in \mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B}$
(iii) $\mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B} = \mathbb{B}^2 \overset{fin}{\rightharpoonup} \mathbb{B}$
(iv) $\mathbb{B}^2 \overset{fin}{\rightharpoonup} \mathbb{B} = \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$

(e) Geben Sie eine injektive Funktion in $\mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B}$ an, die nicht surjektiv ist.

(f) Geben Sie eine injektive und surjektive Funktion in $\mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B}$ an.

(g) Gibt es eine bijektive Funktion in $\mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B}$?

(h) Geben Sie die Kardinalitäten der Mengen $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ und $\mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B}$ an.

(i) Seien X und Y endliche Mengen. Geben Sie die Kardinalitäten von $X \to Y$ und $X \rightharpoonup Y$ an (mithilfe von $|X|$ und $|Y|$).

Aufgabe 2.4: Kaskadierte Funktionen (4+4) Sei die Funktion

$$f = \lambda\,(x, y) \in \mathbb{B}^2 \,\textbf{.}\; \text{if } x = y \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

gegeben.

(a) Es gibt genau eine Funktion $f' \in \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B})$ mit

$$\forall x \in \mathbb{B} \quad \forall y \in \mathbb{B} : \qquad f(x, y) = (f'(x))(y)$$

Geben Sie f' mit λ-Notation und als Menge an.

(b) Es gibt genau eine Funktion

$$K \in (\mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B})) \to (\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B})$$

mit

$$\forall f \in \mathbb{B} \to (\mathbb{B} \to \mathbb{B})\ \forall x \in \mathbb{B}\ \forall y \in \mathbb{B} \ :\ (f(x))(y) = (K(f))(x, y)$$

(i) Geben Sie K mit λ-Notation und als Menge an.
(ii) Ist K bijektiv?

Aufgabe 2.5: Rekursive Definition mit Inferenzregeln (4+3+3) Sie die Menge $P \subseteq \mathbb{N}^3$ rekursiv durch die folgenden Inferenzregeln definiert:

$$\frac{y \in \mathbb{N}}{(0, y, 0) \in P} \qquad \frac{(x, y, z) \in P}{(x + 1, y, z + y) \in P}$$

(a) Geben Sie eine Ableitung und einen Ableitungsbaum für die Aussage $(3, 5, 15) \in P$ an.

(b) Beschreiben Sie P mit einer rekursiven Gleichung $P = \ldots$.

(c) Die Menge $p = \{((x, y), z) \mid (x, y, z) \in P\}$ ist eine Funktion in $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Beschreiben Sie p mit Lambda-Notation $p = \lambda\ \ldots$.

Aufgabe 2.6: Listen (2+2+2+2+2) Wir wollen endliche Folgen von natürlichen Zahlen durch die folgenden Objekte repräsentieren.

(1) Die leere Folge wird durch das Tupel $\langle\rangle$ repräsentiert.

(2) Eine nichtleere Folge $x_1, \ldots, x_n$ wird durch das Paar $\langle x_1, r\rangle$ repräsentiert, wobei r die Repräsentation der Folge $x_2, \ldots, x_n$ ist.

Beispielsweise wird die Folge 2, 7, 4 durch das Objekt

$$\langle 2, \langle 7, \langle 4, \langle\rangle\rangle\rangle\rangle$$

repräsentiert. Die Repräsentation einer Folge $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnen wir mit $[x_1, \ldots, x_n]$.

(a) Definieren Sie mithilfe von Inferenzregeln die Menge

$$L = \{[x_1, \ldots, x_n] \mid n \geq 0, x_1 \in \mathbb{N}, \ldots, x_n \in \mathbb{N}\}$$

ohne die []-Notation zu benutzen. Die Elemente von L werden als Listen bezeichnet.

(b) Definieren Sie die Funktion

$$\mathit{length} \in L \to \mathbb{N}$$
$$\mathit{length}([x_1, \ldots, x_n]) = n$$

ohne die []-Notation zu benutzen.

(c) Definieren Sie die Funktion

$$\mathit{sum} \in L \to \mathbb{N}$$
$$\mathit{sum}([x_1, \ldots, x_n]) = x_1 + \ldots + x_n$$

ohne die []-Notation zu benutzen.

(d) Definieren Sie die Funktion

$$@ \in L \times L \to L$$
$$[x_1, \ldots, x_n]@[y_1, \ldots, y_m] = [x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$$

ohne die []-Notation zu benutzen.

(e) Definieren Sie die Funktion

$$\mathit{reverse} \in L \to L$$
$$\mathit{reverse}([x_1, \ldots, x_n]) = [x_n, \ldots, x_1]$$

ohne die []-Notation zu benutzen.